
Noter til 31610 Anvendt signalbehandling

Simon Boel Pedersen (tidligere Elektronisk Institut), Jørgen
Arendt Jensen, Birthe Guldbrandsen, Kaj-Åge Henneberg

January 11, 2002

Ørsted • DTU, Build. 348,
Technical University of Denmark
DK-2800 Lyngby, Denmark
E-mail: jaj@oersted.dtu.dk
Web: <http://www.es.oersted.dtu.dk/staff/jaj/31610/>

INDHOLD

1	Introduktion	9
2	Reelle analoge og digitale signaler	11
2.1	Opdeling af signaler	11
2.2	Spektrum af et reelt analogt signal med endelig energi	13
2.3	Signaleksempler for analoge signaler med endelig energi	16
2.4	Spektrum for analoge periodiske signaler	26
2.5	Signaleksempler for analoge periodiske signaler	29
2.6	Spektrum for digitale signaler med endelig energi	34
2.7	Signaleksempler for digitale signaler med endelig energi	34
2.8	Spektrum for digitale periodiske signaler	39
2.9	Signaleksempler for digitale periodiske signaler	43
3	Komplekse signaler	45
3.1	Spektrum af et komplekst signal	45
3.2	Analytiske signaler	50
3.3	Øjeblikksamplitude og øjeblikksfrekvens	53
4	Anvendelse af den diskrete fouriertransformation	59
4.1	Relation til andre fouriertransformationer	59
4.2	Den hurtige fouriertransformation	61
4.3	DFT som komplekst digitalt filter	63
4.4	Samtidig DFT af to reelle signaler	64
4.5	DFT af et reelt digitalt signal af længden $2N$	66
4.6	Omvendt DFT af spektret for et digitalt signal af længden $2N$	66
5	Stokastiske signaler	69
5.1	Terminologi og grundbegreber	69
5.2	Stokastisk proces	77
5.3	Korrelationsfunktion og effekttæthedsspektrum	82
5.4	Lineær og ikke-lineær kombination af stokastiske signaler	84
5.5	Korrelationsfunktion for deterministiske signaler med endelig energi	88
5.6	Korrelationsfunktion og effektspektrum for periodiske signaler	89
5.7	Lineær og ikke-lineær bearbejdning af stokastiske signaler	94
6	Beregninger på digitale signaler	105
6.1	Talformater og aritmetriske operationer	105

6.2	Kvantisering af samplede signaler	107
6.3	Digitale filtre	112
6.4	Realisation af digitale filtre	114
7	Estimation	129
7.1	Signalmål	129
7.2	Spektralestimation	144
7.3	Signalmodellering	146
8	Modulation af signaler	153
8.1	Analoge modulationsformer	153
8.2	Tilpasset filter	160
8.3	Detektion af støjbehæftede binære signaler	163
8.4	Digitale modulationsformer	165
9	Eksempler på biomedicinske signaler	173
9.1	Ultralydskanning	173
9.2	Måling af blodhastighed med ultralyd	175
9.3	Elektrofysiologiske signaler	178
9.4	Cellen som signalgenerator	179
9.5	Elektromyografi	183
9.6	Elektrokardiografi	187
9.7	Elektroencefalografi	194
9.8	Afsluttende kommentarer om bioelektrisk signalbehandling	205
A	Om fasetæthedsspektrets ubestemthed	207
B	Schwarz' og Cauchys uligheder	209
C	Et nyttigt formeludtryk	211
D	Støjsignal fra passivt analogt system	213
E	Generator for digitalt støjsignal	215
F	Ækvivalent statistisk båndbredde for et stokastisk signal	217
G	Besselfunktioner af første art	219
H	Kort introduktion til MATLAB	221
H.1	Grundlæggende forhold	221
H.2	Matricer	223
H.3	Flow-kontrol og logiske udtryk	224
H.4	Grafik	225
H.5	.m-filer	227
H.6	Signalbehandling	228
H.7	Yderligere litteratur	229
	Litteratur	231

FIGURER

2.1	De forskellige typer signaler og deres respektive spektre. Samplingfrekvensen for de digitale signaler er 2.5 kHz.	12
2.2	Eksempel på analogt signal med endelig energi.	13
2.3	Firkantsignal.	16
2.4	Spektrum for firkantsignal.	17
2.5	Trekantsignal.	19
2.6	Spektrum for trekantsignal.	20
2.7	Toneimpuls.	21
2.8	Forskellige toneimpulser.	22
2.9	Spektre for toneimpulser.	23
2.10	Spektrum af samplet signal.	24
2.11	Spektre af ”trappekurve” signaler.	25
2.12	Spektrum af originalt signal, samplet signal og ideelt filter for gendannelse.	26
2.13	Eksempler på periodisk analogt signal.	27
2.14	Amplitude og fase for ren tone.	29
2.15	Spektrum af springfunktion moduleret med cosinus startende til $t = 0$	30
2.16	Periodisk firkantsignal.	31
2.17	Spektrum for periodisk firkantsignal med $\tau/T = 0.4$	32
2.18	Firkantsignal og dets spektrum for $\tau/T = 1/2$	33
2.19	Trekantsignaler og tilsvarende spektre.	35
2.20	Trekantsignal med $\tau = T$	36
2.21	Eksempel på digitalt signal med endelig energi.	36
2.22	Digitalt firkantsignal.	39

2.23	Spektrum for digitalt firkantsignal med $N = 8$.	40
2.24	Eksempel på digitalt signal med endelig effekt.	41
2.25	Spektrum for periodisk digital firkant.	44
2.26	Periodisk digital firkant og ækvivalent analogt signal.	44
3.1	Filtrering af komplekse signaler.	49
3.2	Impulssvar og overføringsfunktion for komplekst filter til diskret fouriertransformation.	49
3.3	Konstruktion af analytisk signal.	53
3.4	Øjeblikksamplitude og -fase for analytisk signal.	54
3.5	Øjeblikksamplitude og -fase for analytisk signal med diskontinuitetpunkt.	54
3.6	Øjeblikksamplitude og -fase for analytisk signal med ikke-lineær variation for $\psi_z(t)$.	55
3.7	Komplekst FM-signal $g_{FM}(t) = \exp(j\pi r t^2)$.	56
3.8	Midlet komplekst FM-signal.	58
4.1	Spektrum for digitalt signal med endelig energi og de tilsvarende værdier fra den diskrete fouriertransformation.	60
4.2	Effekten af forøgelsen af N i beregningen af spektret.	61
4.3	Impulssvar for $h_m(n)$ for $N = 64$ og $m = 4$.	64
4.4	Amplitudekarakteristikker for DFT-filtre. $N = 16$.	65
5.1	Eksempler på to forskellige fordelingsfunktioner.	70
5.2	Eksempler på to forskellige sandsynlighedstæthedsfunktioner.	71
5.3	Eksempler på forskellige sandsynlighedstæthedsfunktioner.	73
5.4	Sandsynlighedstæthedsfunktioner ved transformation af stokastisk variabel.	75
5.5	Eksempler på forskellige realisationer af digital og analoge stokastiske signaler.	78
5.6	Beregning af autokorrelationsfunktionen for et analogt signal med endelig energi.	89
5.7	Beregning af autokorrelationsfunktionen for et periodisk signal.	90
5.8	Autokorrelationsfunktionen for en periodisk firkantsignal. Signalernes placering på tidssaksen for bestemmelse af $R_g(\tau_1)$, indikeret ved den stiplede linie, er vist.	94
5.9	Definition af ækvivalent støjbandbredde for filter. f_k er her valgt til middelfrekvensen for spektret.	97
5.10	Effektæthedsspektret og autokorrelationsfunktionen for RC-lavpasfiltreret hvid støj.	100
5.11	Impulssvar, autokorrelationsfunktion og spektrum for integrator.	101
5.12	Effektæthedsspektret for båndbegrænset, hvid støj og kvadreret, båndbegrænset hvid støj.	103

6.1	Format for brøkdel og for heltal.	105
6.2	Model for kvantisering af resultat efter multiplikation.	106
6.3	Sandsynlighedstæthedsfunktionerne for afrunding og afskæring af resultatet efter multiplikation.	106
6.4	Kvantiserings karakteristik.	108
6.5	Udregningen af sandsynlighedstæthedsfunktionen for kvantiseringsstøjen.	109
6.6	Summation af bidragene til sandsynlighedstæthedsfunktionen for kvantiseringsstøjen.	110
6.7	Sandsynlighedstæthedsfunktionen for afrunding ved kvantisering.	110
6.8	Sandsynlighedstæthedsfunktionen for afskæring ved kvantisering.	110
6.9	Symboler for digitale operationer.	115
6.10	Transponering af digitale operationer.	116
6.11	Direkte form 1 (DF1).	116
6.12	Direkte form 2 (DF2).	117
6.13	Gitterstruktur.	117
6.14	Gitter- og stige-blokke.	117
6.15	Amplitudekarakteristik for digital FIR lavpasfilter uden (top) og med (bund) kvantisering af filterkoefficienterne.	120
6.16	Amplitudekarakteristik for den digitale integrator.	121
6.17	Umiddelbar realisation af digital integrator.	121
6.18	Rekursiv realisering af digital integrator.	122
6.19	Realisation af digital integrator $N = 2^3$ med 3 kamfiltre.	123
6.20	Impulssvar for den digitale averager.	123
6.21	Amplitude- og fasekarakteristik for den digitale averager.	124
6.22	Amplitude- og fase-karakteristik for 1. ordens filter for forskellige værdier af b_1 , når $a_0 = 1 - b_1$	125
6.23	Placering af støjkilder for DF1 og DF2 realisering af første ordens filter.	126
6.24	Dødzone.	127
7.1	Signalbehandling for uddragning af den p 'te norm.	131
7.2	Overføringsfunktionen af lavpasfiltret for integrationen.	132
7.3	Signaler for bestemmelse af periodisk signals effekt.	134
7.4	Maximal fejl på måling af RMS-værdi for periodiske signal med ukendt periodetid T som funktion af integrationstiden T_1	136

7.5	Signaler for bestemmelse af periodisk signals effekt med fejlagtig periodetid T_1 .	137
7.6	Signaler ved effektbestemmelse for stokastisk signal.	139
7.7	Spektrum for kvadreret stokastisk signal.	140
7.8	Sikkerhedsgrænser.	142
7.9	Sandsynligheden for at $ x(t) > \xi$ for en normalfordeling.	143
7.10	Estimation af effektspektrum. Det sande spektrum er vist ved den stiplede linie. Øverst er vist periodogrammet og de næste graf viser de midlede periodogrammer, når der benyttes et rektangulært og et Hanning vindue. Nederst er spektret beregnet for kun N/L frekvensværdier.	147
7.11	AR model generator.	148
7.12	MA model generator.	151
8.1	Amplitudemodulation, delspektre.	154
8.2	Amplitudemodulerede signaler og deres amplitudespektre.	155
8.3	Signalbehandling for enkeltsidebåndsmodulation.	155
8.4	Signalbehandling for synkron demodulation.	156
8.5	Demodulation af AM-signal.	158
8.6	Frekvensmodulerede signaler af deres spektre for forskellige μ .	161
8.7	Frekvensmodulerede signaler med lille modulationsindex.	162
8.8	Tilpasset filter for en ultralydpuls og resulterende signal efter filtrering.	163
8.9	Sandsynlighedstætheder for signalet $y_1(t)$.	164
8.10	Sandsynligheden for fejl for gaussisk fordelt støj, når der er lige stor sandsynlighed for de to symboler.	165
8.11	Amplitudemoduleret signal for den binære sekvens 1101010 sendt med $f_c = 1200$ Hz og $T = 4/f_c = 3.3$ ms. Den nederste graf viser signalet efter det har passeret en kanal med en begrænset båndbredde (f.eks. en telefonlinie).	166
8.12	Amplitudemoduleret signal for den binære sekvens 1101010 sendt med $f_c = 1200$ Hz og $T = 4/f_c = 3.3$ ms. Den øverste graf viser det ideelle signal, den næste viser signalet med støj, og til sidst efter filtrering med et tilpasset filter. Den vandrette line viser tærskelværdien $E/2$, og de lodrette streger viser tidspunkterne for detektion.	167
8.13	Frekvensmoduleret signal for den binære sekvens 1101010 sendt med $f_1 = 2000$ Hz, $f_0 = 1000$ Hz og $T = 2$ ms. Den øverste graf viser det transmitterede signal, og den nederste viser signalerne for symbolerne 1 og 0 separat.	168
8.14	Detektor for FSK modulation.	169
8.15	Fasemoduleret signal for den binære sekvens 1101010 sendt med $f_c = 1000$ Hz og $T = 2/f_c = 2$ ms.	170

9.1	Eksempel på 3 MHz ultralydpuls (top), og signal modtaget fra en lever (bund).	174
9.2	Ultralydssystem til at optage billeder af kroppens organer (gengivet fra Jensen (1996)). . .	174
9.3	Ultralydbillede af foster i 13. uge (gengivet fra Jensen (1996)). Man kan se hovedet, benene, rygsøjlen, etc.	175
9.4	Ultralydsignal fra en enkelt spreder, som bevæger sig igennem et ultralyd felt. På venstre side er vist de modtagne signaler og højresiden viser signalet samlet ved den stiplede linie.	176
9.5	Ultralydbillede af carotis arterien til hjernen og dens blodflow.	177
9.6	Farvebillede af blodstrømmen til og fra hjernen.	178
9.7	Cellemembranen adskiller intra- og ekstracellulære ionkoncentrationer. Specifikke ionkanaler (her en kaliumkanal) tillader ioner af diffundere gennem membranen. Et ækvivalentkredsløb repræsenterer membranen som en kondensator i parallelforbindelse med konduktanser for de ionspecifikke natrium, kalium og lækage kanaler. Batterierne repræsenterer de respektive ionstrømmes ligevægtsspændinger (gengivet fra Malmivuo og Plonsey (1995)).	179
9.8	Aktionspotentialets kurveform og de underliggende ionstrømme (gengivet fra Malmivuo og Plonsey (1995)).	181
9.9	Aktionspotentialet, de underliggende strømsløjfer, og tripol- og dipolmodellerne.	182
9.10	Motoriske enhedspotentialer (a) og dens features (b) (kilde: anonym).	184
9.11	Hjertets specialiserede ledningsnet og dets forskellige aktionspotentialer (gengivet fra Malmivuo og Plonsey (1995)).	188
9.12	Einthoven trekanten (gengivet fra Malmivuo og Plonsey (1995)).	189
9.13	Hjerterimpulsens tidlige udbredelse og manifestationen i de tre lead (gengivet fra Malmivuo og Plonsey (1995)).	191
9.14	Hjerterimpulsens sene udbredelse og manifestationen i de tre lead (gengivet fra Malmivuo og Plonsey (1995)).	192
9.15	EKG signaler målt to steder i forkamrene under (a) normal sinusrytme og under (b) forkammerfibrillation (gengivet fra Sahakin et al. (1990)).	193
9.16	MSC spektret for en normal sinusrytme målt i højre forkammer (gengivet fra Sahakin et al. (1990)).	194
9.17	MSC spektret under fibrillation i forkamrene (gengivet fra Sahakin et al. (1990)).	195
9.18	Storehjernens fire lapper: frontal, parietal, temporal, og occipital (gengivet fra Webster (1998)).	196
9.19	Den lagdelte struktur i cortex. I = det molekulære lag, II = det ydre granulære lag, III = det ydre pyramidal lag, IV = det interne granulære lag, V = det store pyramidal lag, VI = det diffuse lag (gengivet fra Webster (1998)).	197
9.20	Pyramidalcellen med cellekernen, aksonet, og dendritterne (gengivet fra Webster (1998)).	198
9.21	Eksempler på EEG signaler (gengivet fra Webster (1998)).	199

9.22	Elektrodeplaceringer og -notation for det internationale 10-20 system (gengivet fra Webster (1998)).	200
9.23	Variationer i EEG signalets amplitudemomenter som følge af en morfinindsprøjtning (angivet ved pilen) (gengivet fra Bronzino (1995)).	201
9.24	Compressed spectral array af EEG målt symmetrisk fra otte punkter på hovedet. Frekvensaksen dækker området fra DC til 16 Hz. Højre side viser normal alpha-rytme. Venstre side viser unormal delta-aktivitet og indikerer derved en tumor i den temporale lap (gengivet fra Nunez (1981)).	202
9.25	Effektspektret midlet over et stigende antal epoker for et sinusformet signal på 10.25 Hz begravet i et støjsignal med en effekt på det dobbelte af sinussignalet (gengivet fra Nunez (1981)).	203
9.26	Koherensspektret beregnet for to signaler med en 10.25 Hz sinusformet signal. Det andet signal indeholder desuden et støjsignal med en effekt, der er 45 gange større end det for de sinusformede signaler. I det øverste koherensspektrum er benyttet 10 epoker, og i det nederste 30 epoker (gengivet fra Nunez (1981)).	204
9.27	Klassifikation af bioelektriske signaler (gengivet fra Bronzino (1995)).	205
A.1	Fasespektrum for analog firkant.	207
A.2	Tredimensional afbildning af $G_R(f)$ og $G_I(f)$ for den viste firkant.	208
A.3	Anvendt afbildning af fasespektrum for analog firkant.	208
H.1	Sampling af sinus	226
H.2	Sampling af sinus	227

TABELLER

2.1	Regneregler for reelle analoge signaler med endelig energi	15
2.2	Regneregler for reelle periodiske analoge signaler	28
2.3	Regneregler for reelle digitale signaler med endelig energi	37
2.4	Regneregler for reelle periodiske digitale signaler	42
3.1	Regneregler for komplekse analoge signaler	47
3.2	Regneregler for komplekse digitale signaler	48
3.3	Egenskaber for hilbertransformationen.	52
5.1	Tabel over sandsynlighedstæthedsfunktioner.	73
G.1	Tabel over Besselfunktioner $J_0(x)$ og $J_1(x)$	220

Introduktion

Nærværende noter er udarbejdet til kurset 31610 Anvendt signalbehandling. Grundlaget for noterne stammer fra kurset 49210 Signalanalyse (tidligere 4931) udarbejdet af Simon Boel Pedersen, og de er en lettere redigeret og rettet version af disse noter for de tidligere kurser. Kursus 49210 gav en generel introduktion til signalanalyse uden bestemt vægt på et givent anvendelsesområde, hvor der i dette kursus 31610 lægges vægt på eksempler fra den medikotekniske verden.

På grund af den stigende anvendelse af computere til måling og behandling af digitale signaler benyttes en stadig stigende del af ingeniørområdet signalbehandling. Derfor er det blevet valgt at inkludere en stor del af det tidligere kursus 49210 i et indledende kursus i signalanalyse (01032) i elektrofagpakken. De indledende elementer af analysen af deterministiske signaler er således henlagt til 01032, og større vægt er i 31610 lagt på analyse af stokastiske signaler og på signalbehandling. En kort repetition af analysen af de deterministiske signaler gives dog her, men forudsætningen for gennemførelse af kurset er kendskab til grundlæggende analyse som i 01032 og til sandsynlighedsteori svarende til et indledende kursus. Tanken med det nye kursus 31610 er stadig at give en bred introduktion til signalanalyse suppleret med en række signaleksempler og øvelser fra det biomedicinske område. Dette gøres for dels at give en introduktion til moderne signalbehandlingsprogrammer og dels for at introducere flere praktiske og konkrete aspekter i undervisningen. Endelig vil kurset blive afsluttet med en større opgave, for yderligere at styrke den praktiske tilgang til signalbehandlingen.

Kurset og noterne kan således benyttes til en generel introduktion til analysen og behandlingen af signaler, og kan danne grundlag for et videre undervisningsforløb med speciale i både generel signalbehandling og i medikoteknisk signalbehandling.

Jørgen Arendt Jensen
Januar, 2002.

Reelle analoge og digitale signaler

I dette kapitel gives en kort opsummering af analysen af deterministiske, reelle signaler. For hver signaltype er gengivet definitionerne for fouriertransformation samt de gældende regneregler. Desuden gives en række eksempler på signaler og deres spektre. Der gives i kapitlet få udregninger af resultater, da disse anses kendt fra tidligere kurser. Kapitlet er således tænkt som en opsummering af og reference for væsentlige resultater fra signalanalysen.

2.1 Opdeling af signaler

Traditionelt opdeles signaler i forskellige typer for at lette analysen af dem. Der skelnes mellem analog og digitale (tidsdiskrete) signaler og mellem signaler med endelig energi og endelig effekt. Dette letter udregningen af deres spektre og fortolkningen af resultatet. På figur 2.1 er vist de fire forskellige typer signaler. På venstre side er vist signalet i tidsdomænet og på højre side de tilsvarende amplitudespektre. Øverst er vist et analogt signal $g(t)$ med endelig energi samt det tilsvarende amplitudetæthedsspektrum $|G(f)|$. Bemærk at spektret er en (stykvis) kontinuerlig funktion af frekvensen og således eksisterer for alle frekvenser. En uendelig gentagelse af dette signal med periodetiden T :

$$g_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT), \quad (2.1)$$

giver et analogt periodiske signal med endelig effekt. Amplitudespektret er her diskret med harmoniske komponenter ved m/T og er givet ved

$$G_p(m) = \frac{1}{T} G\left(\frac{m}{T}\right). \quad (2.2)$$

En sampling af $g(t)$ med samplingperioden ΔT giver

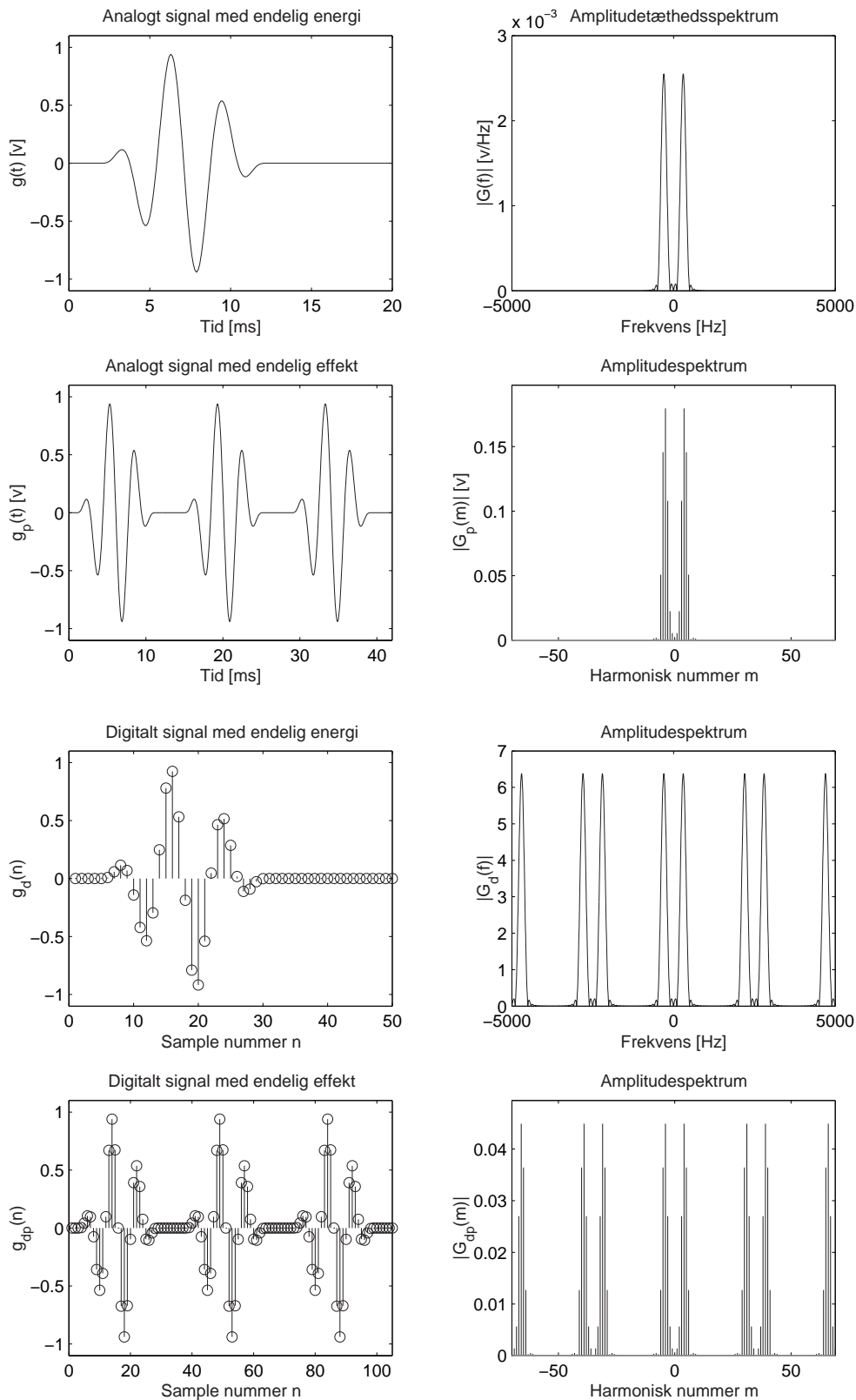
$$g_d(n) = g(n\Delta T), \quad (2.3)$$

hvor der fås det periodiske spektrum

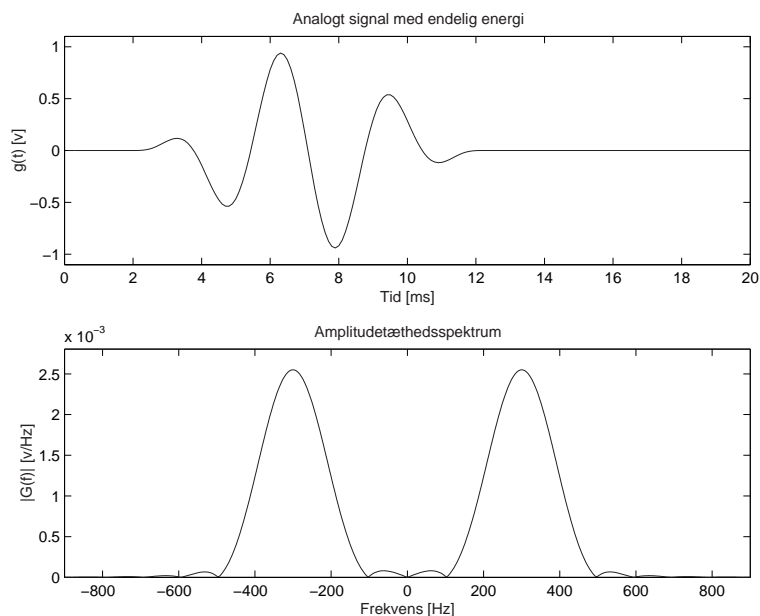
$$G_d(f) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G\left(f - \frac{m}{\Delta T}\right) \quad (2.4)$$

vist til højre i den tredje graf. Der fås således en uendelig spektral gentagelse af $G(f)$ med perioden $1/\Delta T$. Hvis dette digitale signal gøres periodisk med perioden N :

$$g_{dp}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_d(n - kN) \quad (2.5)$$



Figur 2.1: De forskellige typer signaler og deres respektive spektre. Samplingfrekvensen for de digitale signaler er 2.5 kHz.



Figur 2.2: Eksempel på analogt signal med endelig energi.

fås det diskrete periodiske spektrum

$$G_{dp}(m) = \frac{1}{N} G_d\left(\frac{m}{N\Delta T}\right), \quad (2.6)$$

der er vist på den sidste graf.

Der er således tæt sammenhæng mellem de forskellige signaltyper og deres spektre, og dette kan udnyttes i analysen af signaltyperne. Det giver også mulighed for at benytte den diskrete fouriertransformation til at opnå kendskab til spektralindholdet i signaler som beskrevet i kapitel 4.

2.2 Spektrum af et reelt analogt signal med endelig energi

For et reelt signal $g(t)$ med endelig energi kan dets komplekse spektrum $G(f)$ beregnes af fourierintegralet

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad (2.7)$$

hvor f er frekvensen. Fra det komplekse spektrum kan tidssignalet beregnes ved

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)e^{j2\pi ft} df. \quad (2.8)$$

Udtrykkene kan anvendes når:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty \quad (2.9)$$

At signalet $g(t)$ har spektret $G(f)$, vil i det følgende blive betegnet med

$$g(t) \leftrightarrow G(f). \quad (2.10)$$

Et signaleksempel er vist på figur 2.2. Bemærk at spektret er (stykvist) kontinuert, og at det eksisterer for alle frekvenser, både positive og negative. Hvis amplituden for signalet er i volt er enheden for spektret volt/hertz, og er således et tæthedsspektrum.

$G(f)$ er kompleks og kan derfor udtrykkes på formen

$$G(f) = \operatorname{Re}(G(f)) + j \operatorname{Im}(G(f)) = G_R(f) + jG_I(f) \quad (2.11)$$

eller som

$$G(f) = A_g(f)e^{j\phi_g(f)}, \quad (2.12)$$

hvor man som sædvanlig har, at

$$\begin{aligned} A_g(f) &= \sqrt{G_R^2(f) + G_I^2(f)}, \\ \varphi_g(f) &= \arctan \frac{G_I(f)}{G_R(f)}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

og

$$\begin{aligned} G_R(f) &= A_g(f) \cos \varphi_g(f), \\ G_I(f) &= A_g(f) \sin \varphi_g(f). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Størrelsen $A_g(f)$ benævnes amplitudetæthedsspektret og $\varphi_g(f)$ fasetæthedsspektret for $g(t)$. Praktisk betydning har også $A_g^2(f)$ med navnet energitæthedsspektret. For ”skikkelige” signaler gælder det, at $A_g(f) \rightarrow 0$, når den numeriske værdi af frekvensen bliver meget stor.

Af udtrykket for fasetæthedsspektret fremgår det, at bestemmelsen af $\varphi_g(f)$ er behæftet med en ubestemthed på et helt multiplum af 2π . Et givet fasespektrum kan følgelig afbildes på mange måder, og det er derfor bekvemt at fastsætte bestemte regler for afbildningen for at lette sammenligninger. Problemet behandles nærmere i [appendix A](#).

Et vilkårligt reelt signal kan opspaltes i en lige og en ulige del:

$$g(t) = g_l(t) + g_u(t), \quad (2.15)$$

hvor

$$\begin{aligned} g_l(t) &= \frac{g(t) + g(-t)}{2} \\ g_u(t) &= \frac{g(t) - g(-t)}{2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Betragtes udtrykkene for $G_R(f)$ og $G_I(f)$ ses, at $g_u(t)$ ikke bidrager til $G_R(f)$ og $g_l(t)$ ikke bidrager til $G_I(f)$. Hermed fås

$$g_l(t) \leftrightarrow G_R(f) \quad \text{og} \quad g_u(t) \leftrightarrow G_I(f) \quad (2.17)$$

Opspaltes $g(t)$ på denne måde, kan man benytte følgende formler ved beregning af $g(t)$'s spektrum:

$$\begin{aligned} G_R(f) &= 2 \int_0^\infty g_l(t) \cos(2\pi ft) dt \\ G_I(f) &= -2 \int_0^\infty g_u(t) \sin(2\pi ft) dt \end{aligned} \quad (2.18)$$

same nedenstående udtryk til at beregne signalet fra spektret

$$\begin{aligned} g_l(t) &= 2 \int_0^\infty G_R(f) \cos(2\pi ft) dt \\ g_u(t) &= 2 \int_0^\infty G_I(f) \sin(2\pi ft) dt \end{aligned} \quad (2.19)$$

De gængse regler for reelle analoge signaler med endelig energi er vist i [tabel 2.1](#).

Regneregler for reelle analoge signaler med endelig energi

$$g(t) \leftrightarrow G(f); \quad g_1(t) \leftrightarrow G_1(f); \quad g_2(t) \leftrightarrow G_2(f).$$

1. Linearitetsreglen

$$ag_1(t) + bg_2(t) \leftrightarrow aG_1(f) + bG_2(f) \quad (a \text{ og } b \text{ konstanter}). \quad (2.20)$$

2. Symmetrireglen

$$G(t) \leftrightarrow g(-f) \quad (2.21)$$

3. Tidstransformationsreglen

$$g(kt) \leftrightarrow \frac{1}{|k|} G\left(\frac{f}{k}\right) \quad (k \text{ en konstant}). \quad (2.22)$$

4. Reglen om skift af tidsaksens retning

$$g(-t) \leftrightarrow G(-f) = G^*(f) \quad (2.23)$$

5. Reglen om forskydning af tidsaksens nulpunkt

$$g(t + t_0) \leftrightarrow G(f)e^{j2\pi f t_0} \quad (t_0 \text{ en konstant}). \quad (2.24)$$

6. Reglen om forskydning af frekvensaksens nulpunkt

$$g(t)e^{-j2\pi f_0 t} \leftrightarrow G(f + f_0) \quad (f_0 \text{ en konstant}). \quad (2.25)$$

$$g(t) \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}(G(f - f_0) + G(f + f_0))$$

$$g(t) \sin(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2j}(G(f - f_0) - G(f + f_0))$$

7. Differentiationsreglen

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n G(f). \quad (2.26)$$

8. Foldningsreglen

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\theta)g_2(t - \theta)d\theta \leftrightarrow G_1(f)G_2(f) \quad (2.27)$$

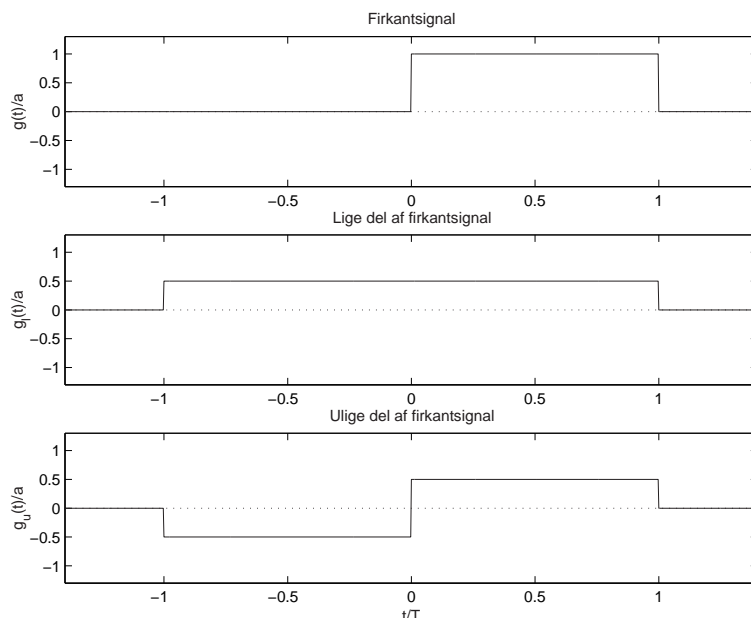
og

$$g_1(t)g_2(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} G_1(s)G_2(f - s)ds \quad (2.28)$$

Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad (2.29)$$

Tabel 2.1: Regneregler for reelle analoge signaler med endelig energi



Figur 2.3: Firkantsignal.

2.3 Signaleksempler for analoge signaler med endelig energi

I dette afsnit gives en række eksempler på basale signaler og deres spektre, der kan benyttes sammen med regnereglerne til at konstruere mere sammensatte signaler.

2.3.1 Spektrum af firkantsignal

Firkantsignal er specificeret ved

$$g(t) = \begin{cases} a & 0 < t < T \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (2.30)$$

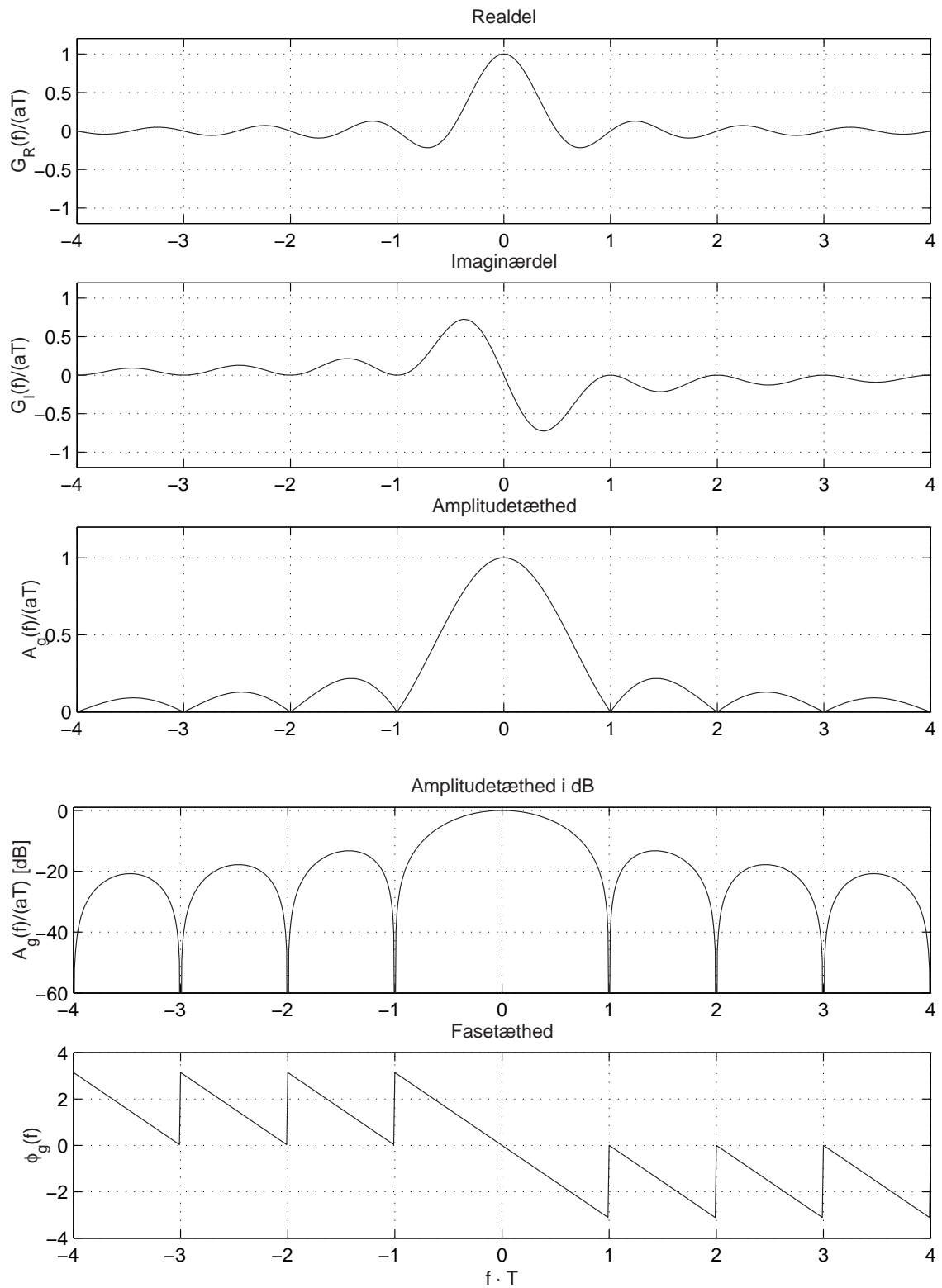
hvor a og T er positive konstanter. Signalet kan ses på figur 2.3.

På samme figur ses endvidere den lige del $g_l(t)$ og den ulige del $g_u(t)$ af signalet. Spektret af firkantsignalet kan beregnes af

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_0^T a e^{-j2\pi ft} dt = \frac{a}{-j2\pi f} (e^{-j2\pi fT} - 1) = \frac{a}{\pi f} \left(\frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j} \right) e^{-j\pi fT} \\ &= aT \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} e^{-j\pi fT} \\ &= aT \left(\frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} + j \frac{\cos(2\pi fT) - 1}{2\pi fT} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dette spektrum ses afbildet på figur 2.4 med realdel og imaginærdel. Udtrykkes spektret af $g(t)$ på formen amplitudetæthedsspektrum - fasetæthedsspektrum, finder man

$$A_g(f) = aT \left(\left(\frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} \right)^2 + \left(\frac{\cos(2\pi fT) - 1}{2\pi fT} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.32)$$



Figur 2.4: Spektrum for firkantsignal.

som let reduceres til¹

$$A_g(f) = aT \left| \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \right|, \quad (2.33)$$

samt

$$\phi_g(f) = \arctan \left(\frac{\cos(2\pi fT) - 1}{\sin(2\pi fT)} \right) \quad (2.34)$$

eller

$$\phi_g(f) = \begin{cases} +(\pi|f|T) & \text{modulo } \pi \text{ for } f < 0 \\ -(\pi fT) & \text{modulo } \pi \text{ for } f > 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Begge disse størrelser ses også på figur 2.4.

Bemærk, at $A_g(f)$ i hovedsagen falder med 20 dB/dekade, når $|f| > \frac{1}{T}$. Ifølge linearitetsreglen gælder det, at

$$g_l(t) \leftrightarrow aT \frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} \quad (2.36)$$

og

$$g_u(t) \leftrightarrow jaT \frac{\cos(2\pi fT) - 1}{2\pi fT}. \quad (2.37)$$

2.3.2 Spektrum af et trekantsignal

Ved et trekantsignal forstås signalet

$$g(t) = \begin{cases} a(T-t)/T & \text{for } 0 < t < T \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (2.38)$$

hvor a og T er positive konstanter. På figur 2.5 ses signalet samt dets opspaltning i en lige del og en ulige del.

Trekantsignalet er givet ved

$$G(f) = \frac{aT}{2} \left(\frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2} + j \frac{1}{\pi fT} \left(\frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} - 1 \right) \right). \quad (2.39)$$

$G(f)$ kan også udtrykkes på formen

$$A_g(f) = \frac{a}{T(2\pi f)^2} \sqrt{(1 - \cos(2\pi fT))^2 + (\sin(2\pi fT) - 2\pi fT)^2} \quad (2.40)$$

$$\phi_g(f) = \arctan \frac{\sin(2\pi fT) - 2\pi fT}{1 - \cos(2\pi fT)}. \quad (2.41)$$

Af disse udtryk ses det, at $A_g(f)$ i hovedsagen falder med 20 dB/dekade, når $|f| > \frac{1}{T}$ samt, at $\phi_g(f) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, når $f \rightarrow \infty$. Figur 2.6 viser en afbildning af spektret for det omtalte trekantsignal.

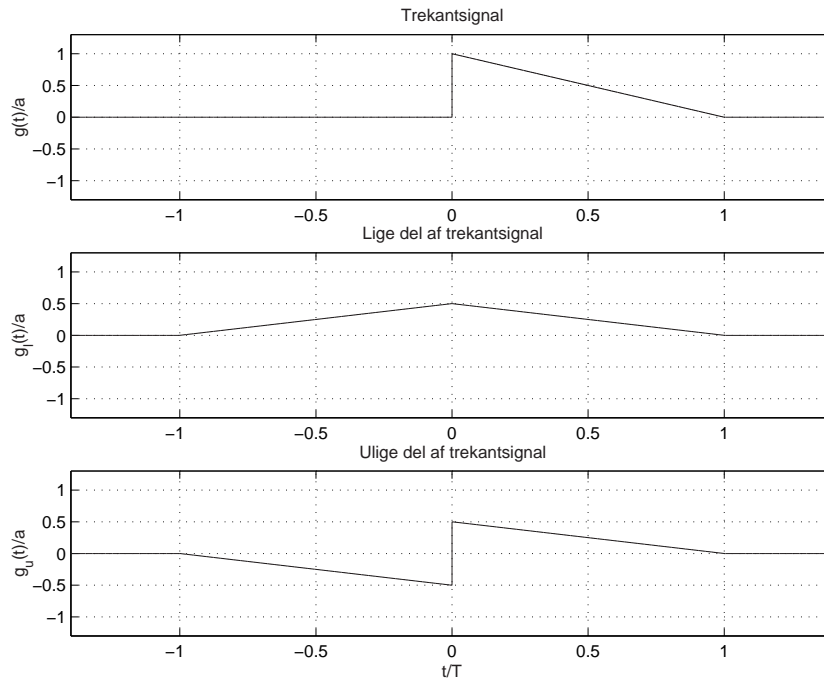
Også i dette tilfælde giver opspaltningen af $g(t)$ i en lige del og en ulige del to andre fouriertransformationspar

$$g_l(t) \leftrightarrow \frac{aT}{2} \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2} \quad (2.42)$$

og

$$g_u(t) \leftrightarrow j \frac{aT}{2} \frac{1}{\pi fT} \left(\frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} - 1 \right). \quad (2.43)$$

¹Eller det kan benyttes direkte at $|aT \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} e^{-j\pi fT}| = aT \left| \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \right|$ for aT positiv.



Figur 2.5: Trekantsignal.

Det er i denne sammenhæng værd at bemærke, at den numeriske værdi af $g_l(t)$'s spektrum i hovedsagen falder med 40 dB/dekade, og at fasetæthedsspektret er identisk = 0.

Sammenligner man formen for spektret af $g_l(t)$ med formen af spektret for den lige del af firkantsignalet i kap. 2.3.1, ses det, at det symmetriske trekantsignals spektrum er proportionalt med kvadratet på det symmetriske firkantsignals spektrum. Dette er ifølge foldningsreglen ensbetydende med, at den lige del af trekantsignalet (med varigheden $2T$) kan tænkes opstået som en foldning af to symmetriske firkantsignaler (hver med varigheden T).

2.3.3 Spektrum af en toneimpuls

Ved mange tekniske anvendelser benyttes toneimpulser, d.v.s. signaler bestående af et stykke af et rentonesignal (se figur 2.7)

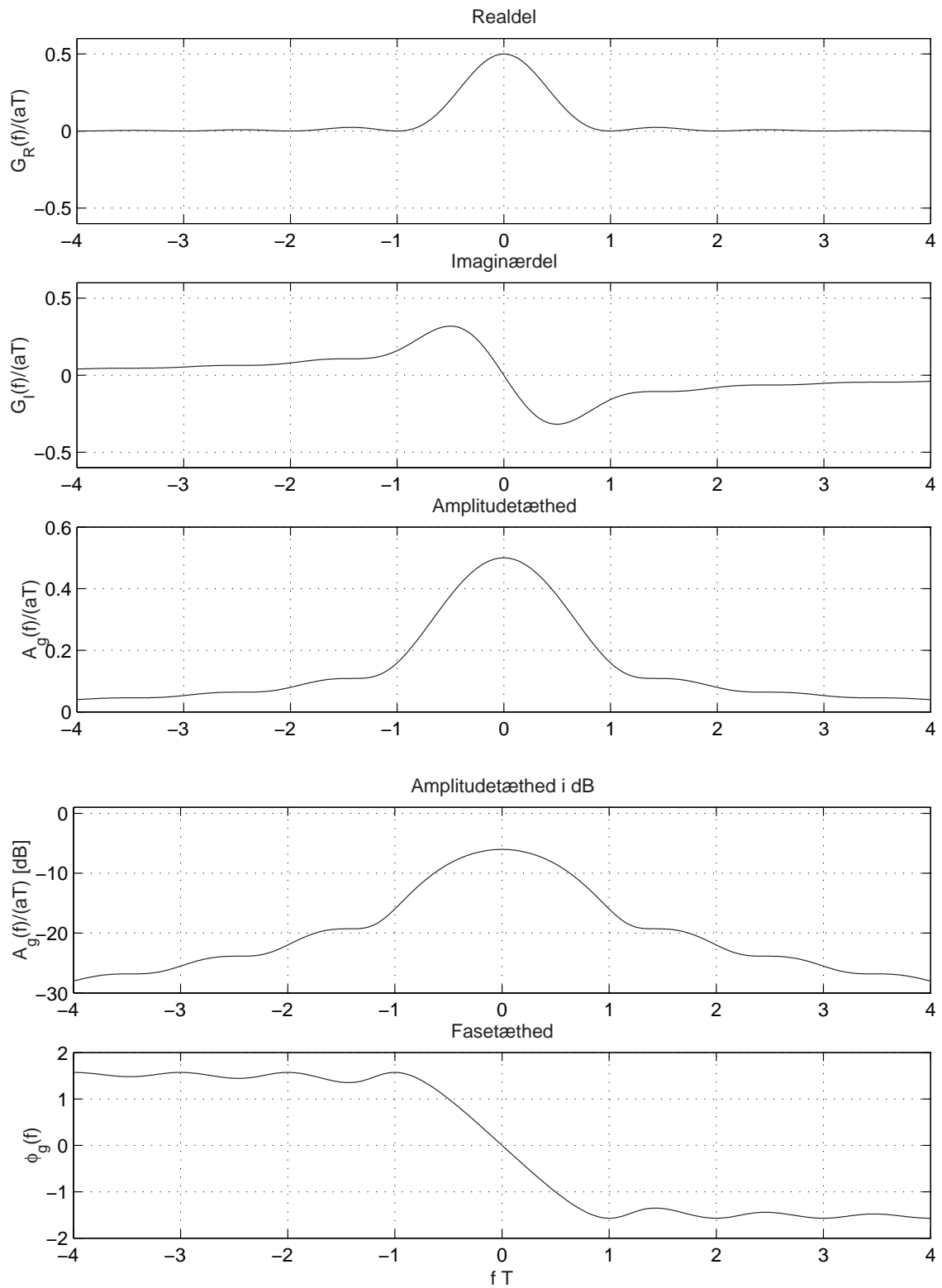
$$g(t) = \begin{cases} a \cos(2\pi f_0 t + \theta) & \text{for } 0 < t < T \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \quad (2.44)$$

hvor a , f_0 , θ og T er konstanter. Spektret af dette signal kan let findes, idet man omskriver $g(t)$ i intervallet $[0, T]$ på følgende måde

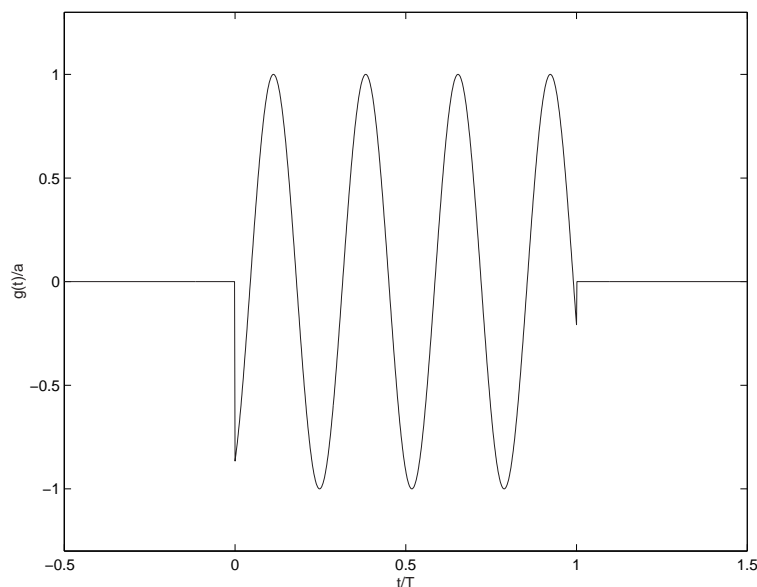
$$g(t) = \frac{a}{2} \left(e^{j\theta} e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j\theta} e^{-j2\pi f_0 t} \right), \quad (2.45)$$

og dernæst fortolker udtrykket som anvendelse af frekvensforskydningsreglen på et firkantsignal med varigheden T . Man får da (se kap. 2.3.1)

$$G(f) = \frac{aT}{2} \left(\frac{\sin(\pi(f - f_0)T)}{\pi(f - f_0)T} e^{+j\theta} e^{-j\pi(f - f_0)T} + \frac{\sin(\pi(f + f_0)T)}{\pi(f + f_0)T} e^{-j\theta} e^{-j\pi(f + f_0)T} \right). \quad (2.46)$$



Figur 2.6: Spektrum for trekantsignal.



Figur 2.7: Toneimpuls.

Dette udtryk er ikke let at overskue. Sættes $p = Tf_0$ til at være et heltal, og forskydes signalet $\frac{1}{2}T$ mod negative t -værdier, vil det indeholde p hele perioder af den rene tone, og spektret bliver

$$\frac{aT}{2} \left(\frac{\sin(p\pi(f - f_0)/f_0)}{p\pi(f - f_0)/f_0} e^{j\theta} + \frac{\sin(p\pi(f + f_0)/f_0)}{p\pi(f + f_0)/f_0} e^{-j\theta} \right) (-1)^p. \quad (2.47)$$

Med $\theta = 0$ fås signalet $g_c(t)$ og med $\theta = -\frac{\pi}{2}$ signalet $g_s(t)$ (se fig. 2.8) med spektrene

$$G_c(f) = \frac{a}{\pi f_0} \frac{\sin(p\pi f/f_0)}{(f/f_0)^2 - 1} \cdot \frac{f}{f_0} \quad (2.48)$$

og

$$G_s(f) = \frac{a}{j\pi f_0} \frac{\sin(p\pi f/f_0)}{(f/f_0)^2 - 1}. \quad (2.49)$$

På fig. 2.9 kan man se $|G_c(f)|$ og $|G_s(f)|$ for forskellige værdier af p . Som det kunne forventes, vil signalets samlede energi koncentreres i nærheden af $f = \pm f_0$, når p bliver stor.

2.3.4 Egenskaber for δ -funktionen

De fleste af δ -funktionens egenskaber følger af formel manipulation med integraludtrykket

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t)dt = g(0). \quad (2.50)$$

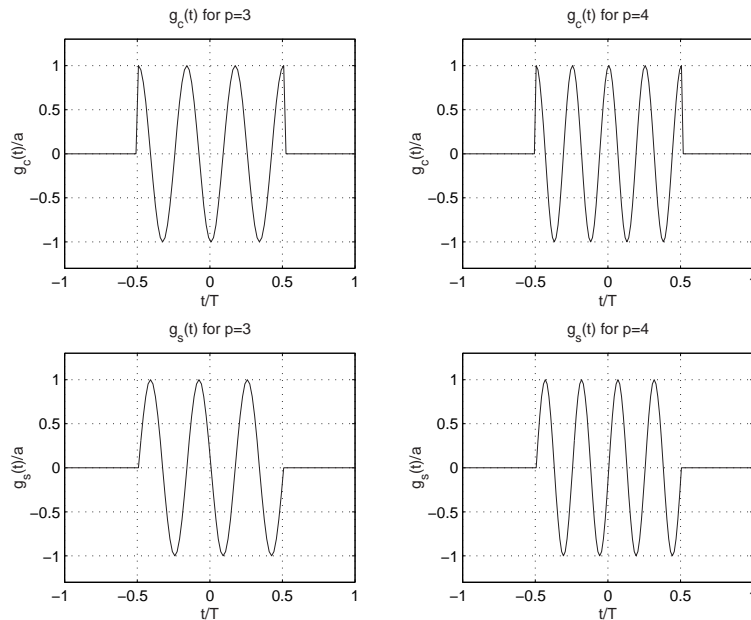
Hermed kan fås følgende egenskaber:

Tidsforskydning

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t - t_0)dt = g(t_0). \quad (2.51)$$

Foldning

$$g(t) * \delta(t) = g(t). \quad (2.52)$$



Figur 2.8: Forskellige toneimpulser.

Tidstransformation

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(kt)dt = \frac{1}{|k|}g(0), \quad (2.53)$$

Differentiation

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta'(t)dt = -g'(0). \quad (2.54)$$

Spektrum

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad \text{og} \quad 1 \leftrightarrow \delta(f). \quad (2.55)$$

Gentaget δ -funktion

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T) \leftrightarrow \frac{1}{\Delta T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - m \cdot \frac{1}{\Delta T}) \quad (2.56)$$

2.3.5 Spektrum af periodisk samplet signal

Ved et samplet signal forstås det signal, der fremkommer, når et sædvanligt (skikkeligt) analogt signal $g(t)$ multipliceres med en række δ -funktioner, d.v.s. signalet

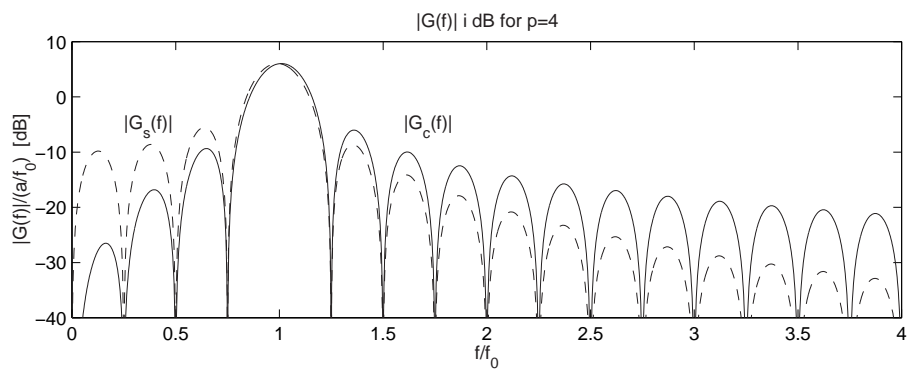
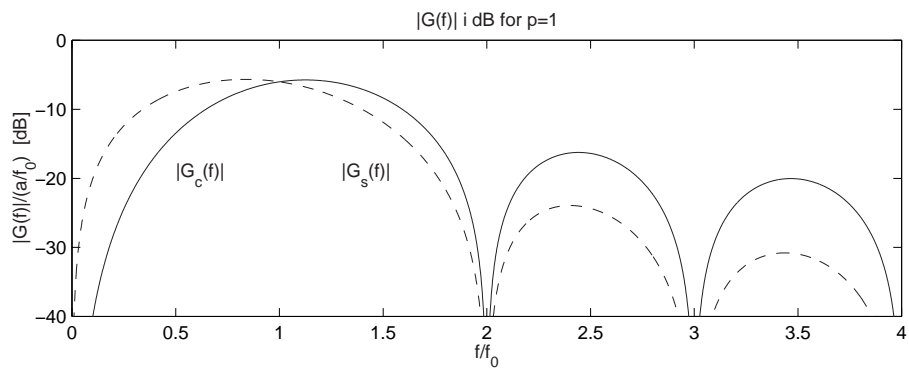
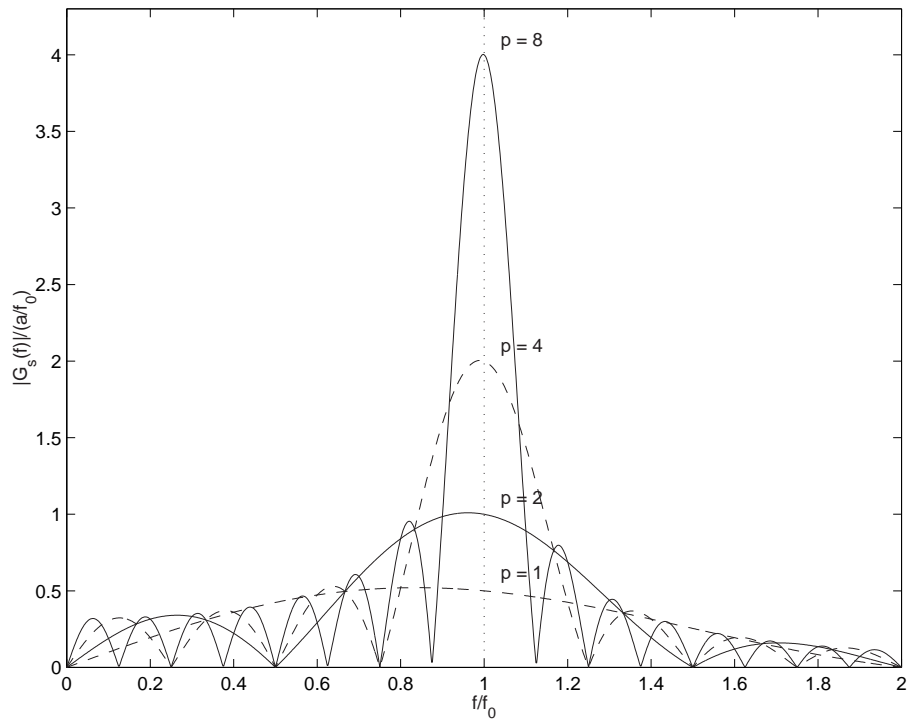
$$g(t) \cdot \sum_n \delta(t - t_n), \quad (2.57)$$

hvor t_n er de tidspunkter, hvor δ -funktionerne ”optræder”. Sætter man $t_n = n\Delta T$, hvor ΔT er en konstant (sampling-tidsintervallet), får man det periodisk samlede signal

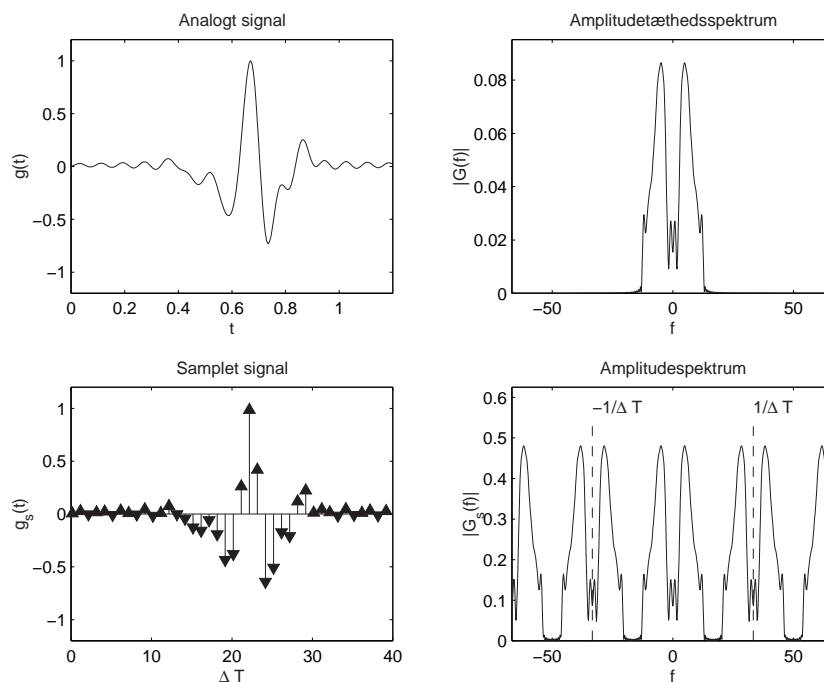
$$g_s(t) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T). \quad (2.58)$$

og man få spektret

$$g_s(t) \leftrightarrow \frac{1}{\Delta T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(f - m \frac{1}{\Delta T}). \quad (2.59)$$



Figur 2.9: Spektre for toneimpulser.



Figur 2.10: Spektrum af samplet signal.

Af udtrykket fremgår det, at $G_s(f)$ er en periodisk gentagelse af $G(f)$ med perioden $\frac{1}{\Delta T}$. Bemærk, at $G_s(f)$ ikke forsvinder for $|f| \rightarrow \infty$. Dette skyldes naturligvis δ -funktionerne i $g_s(t)$. Figur 2.10 viser et eksempel på spektret af et samplet signal. Størrelsen $f_s = \frac{1}{\Delta T}$ betegnes samplingfrekvensen.

2.3.6 Spektrum af et trappekurvesignal

Et "trappekurvesignal" $g_t(t)$ fremkommer ved at folde et samplet signal $g_s(t)$ med firkantsignalet $g_f(t)$:

$$g_t(t) = g_s(t) * g_f(t), \quad (2.60)$$

og dermed

$$G_t(f) = G_s(f)G_f(f). \quad (2.61)$$

Er firkantsignalet givet ved

$$g_f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \tau \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \quad (2.62)$$

fås (jf. kap. 2.3.1 og kap. 2.3.5)

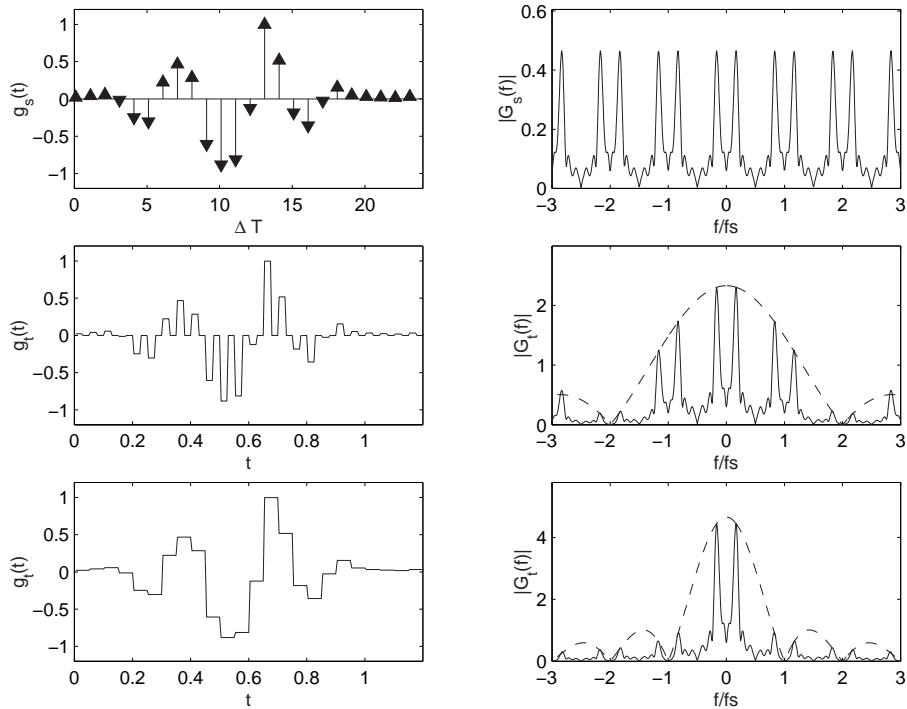
$$G_t(f) = \frac{\tau}{\Delta T} \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} e^{-j\pi f \tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(f - m \frac{1}{\Delta T}). \quad (2.63)$$

Figur 2.11 viser eksempler på trappekurvesignaler og deres spektre.

2.3.7 Samplingsætningen

Betragter man et båndbegrænset signal $g(t)$, d.v.s. et signal, om hvis spektrum $G(f)$ det gælder, at

$$G(f) \equiv 0 \quad \text{for} \quad |f| \geq f_g, \quad (2.64)$$



Figur 2.11: Spektre af "trappekurve" signaler.

kan man vise, at signalets værdier til diskrete tidspunkter med tidsafstanden $(2f_g)^{-1}$ fuldstændigt beskriver signalets egenskaber. Dette kan gøres på følgende måde. Af signalet $g(t)$ dannes det samplede signal

$$g_s(t) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \frac{1}{2f_g}), \quad (2.65)$$

hvis spektrum $G_s(f)$ skrives på formen

$$G_s(f) = 2f_g \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(f - m2f_g) \quad (2.66)$$

(se figur 2.12). Af udtrykket og af figur 2.12 ses det umiddelbart, at man ved hjælp af et ideelt lavpasfilter med overføringsfunktionen $H(f)$ kan isolere $g(t)$'s spektrum fra $G_s(f)$ og dermed skaffe sig kendskab til $g(t)$'s originale form.

Med

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{2f_g} & |f| < f_g \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \quad (2.67)$$

er

$$G(f) = G_s(f)H(f), \quad (2.68)$$

hvilket er ensbetydende med

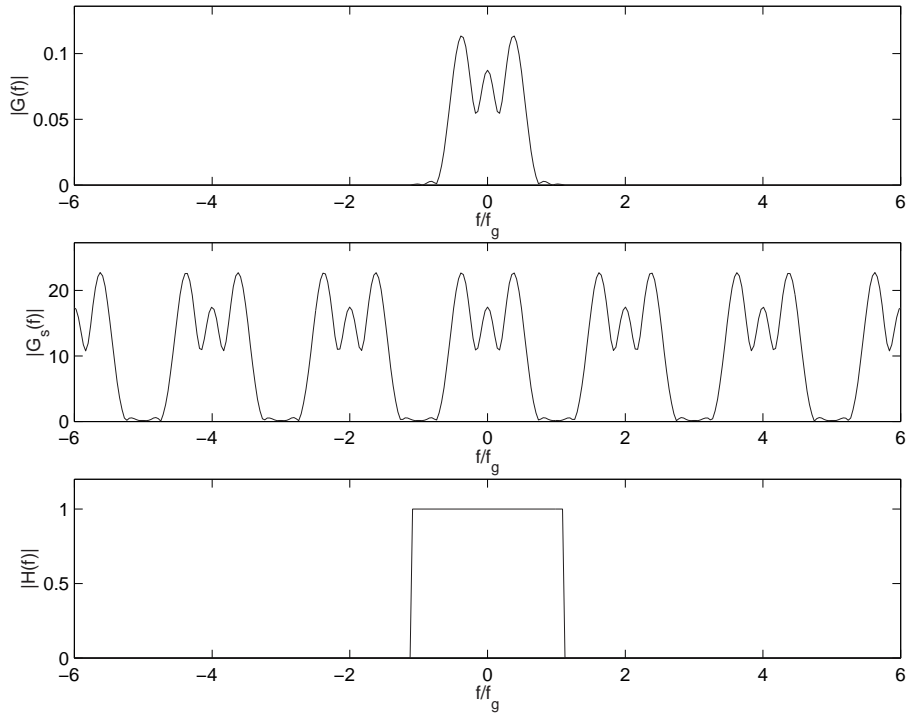
$$g(t) = g_s(t) * h(t), \quad (2.69)$$

hvor $h(t) \leftrightarrow H(f)$. Da

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi f_g t)}{2\pi f_g t} \quad (2.70)$$

får man

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\frac{n}{2f_g}) \delta(\theta - \frac{n}{2f_g}) \frac{\sin(2\pi f_g(t - \theta))}{2\pi f_g(t - \theta)} d\theta \quad (2.71)$$



Figur 2.12: Spektrum af originalt signal, samplet signal og ideelt filter for gendannelse.

eller

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2f_g}\right) \frac{\sin(2\pi f_g(t - \frac{n}{2f_g}))}{2\pi f_g(t - \frac{n}{2f_g})}. \quad (2.72)$$

Heraf ses det, at enhver værdi af $g(t)$ kan beregnes ud fra $g(t)$'s værdier til tidspunkterne $\frac{n}{2f_g}$. Denne sætning kan også formuleres i frekvensdomænet, jf. symmetrireglen på følgende måde: Såfremt signalet g_t er tidsbegrænset, d.v.s., at

$$g(t) \equiv 0 \quad \text{for} \quad |t| \geq T \quad (2.73)$$

er den fouriertransformerede $G(f)$ af $g(t)$ fuldstændig bestemt ud fra $G(f)$'s værdier til frekvenserne $m/2T$, hvor m er hel, og hvor T er konstant. Man finder

$$G(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{m}{2T}\right) \frac{\sin(2\pi T(f - \frac{m}{2T}))}{2\pi T(f - \frac{m}{2T})}. \quad (2.74)$$

2.4 Spektrum for analoge periodiske signaler

Fourierrækken for et analogt periodisk signal med periodetiden T beregnes ved

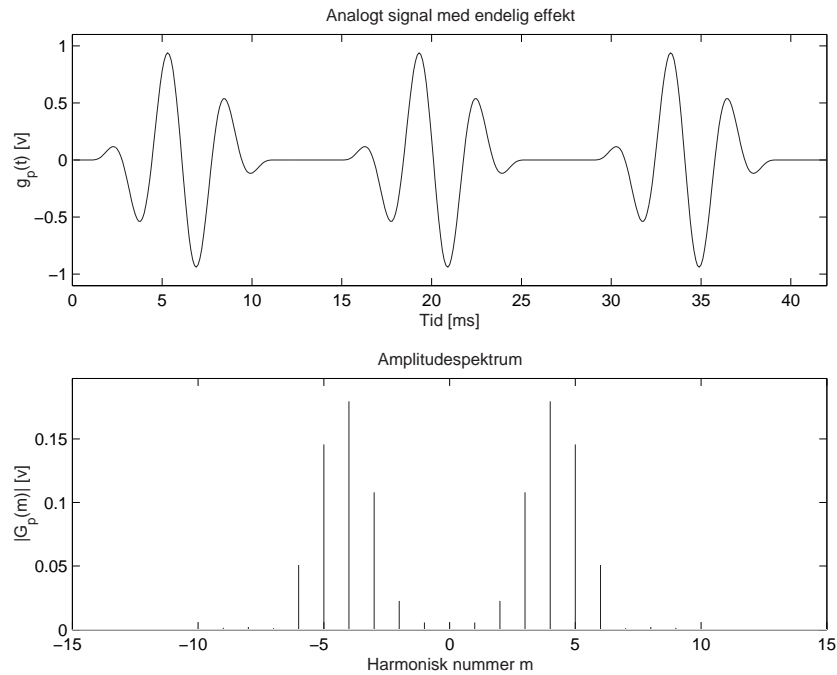
$$G(m) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi \frac{m}{T} t} dt \quad (2.75)$$

og det tilsvarende tidssignal ved

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G(m) e^{j2\pi \frac{m}{T} t}. \quad (2.76)$$

m er her et heltal.

Et eksempel er vist på figur 2.13. Bemærk at der for fourierrækken kun findes frekvenskomponenter for



Figur 2.13: Eksempler på periodisk analogt signal.

$f = m/T$ uanset signalets udseende. Fourierrækken kan også findes fra spektret for et signal $g_e(t)$ med endelig energi

$$G(m) = \frac{1}{T} G_e\left(\frac{m}{T}\right) \quad (2.77)$$

$$g_e(t) \leftrightarrow G_e(f)$$

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_e(t - kT) \quad (2.78)$$

hvor signalet $g_e(t)$ er gentaget med perioden T . Bemærk at der her ikke er nogen bånd på periodetiden T i forhold til signalets $g_e(t)$'s længde.

Er $g(t)$ en strøm eller en spænding, vil den effekt, som signalet afsætter i en modstand på 1 ohm, kunne beregnes af

$$p = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^2(t) dt. \quad (2.79)$$

Parsevals formel udtrykker da, at signalets samlede effekt - underforstået i en 1 ohms modstand - også kan findes som en sum af effekten af de enkelte harmoniske i signalets spektrum. I praksis benytter man foruden effektbegrebet også begrebet RMS-værdi² af et periodisk signal givet ved udtrykket

$$\text{RMS}\{g(t)\} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^2(t) dt} = \sqrt{p}. \quad (2.80)$$

De gængse regler for reelle analoge signaler med endelig effekt er vist i tabel 2.2.

²RMS = root mean square.

Regneregler for reelle periodiske analoge signaler

$$g(t) \xleftrightarrow{T} G(m); \quad g_1(t) \xleftrightarrow{T} G_1(m); \quad g_2(t) \xleftrightarrow{T} G_2(m).$$

1. Linearitetsreglen

$$ag_1(t) + bg_2(t) \xleftrightarrow{T} aG_1(m) + bG_2(m) \quad (a \text{ og } b \text{ konstanter}). \quad (2.81)$$

2. Symmetrireglen er ikke relevant.

3. Tidstransformationsreglen

$$g(kt) \xleftrightarrow{T/k} G(m) \quad (k \text{ en konstant}). \quad (2.82)$$

4. Reglen om skift af tidsaksens retning

$$g(-t) \xleftrightarrow{T} G(-m) = G^*(m) \quad (2.83)$$

5. Reglen om forskydning af tidsaksens nulpunkt

$$g(t + t_0) \xleftrightarrow{T} G(m)e^{jm\frac{2\pi}{T}t_0} \quad (t_0 \text{ en konstant}). \quad (2.84)$$

6. Reglen om forskydning af frekvensaksens nulpunkt

$$g(t)e^{-jm_0\frac{2\pi}{T}t} \xleftrightarrow{T} G(m + m_0) \quad (m_0 \text{ en heltallig konstant}). \quad (2.85)$$

$$g(t) \cos(m_0\frac{2\pi}{T}t) \xleftrightarrow{T} \frac{1}{2}(G(m - m_0) + G(m + m_0)).$$

$$g(t) \sin(m_0\frac{2\pi}{T}t) \xleftrightarrow{T} \frac{1}{2j}(G(m - m_0) - G(m + m_0)).$$

7. Differentiationsreglen

$$\frac{d^q g(t)}{dt^q} \xleftrightarrow{T} (j\frac{2\pi}{T}m)^q G(m). \quad (2.86)$$

8. Foldningsreglen

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_1(\theta)g_2(t - \theta)d\theta \xleftrightarrow{T} G_1(m)G_2(m) \quad (2.87)$$

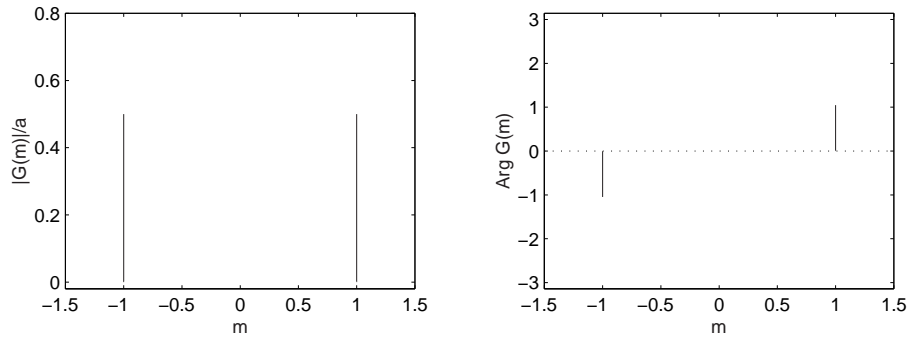
og

$$g_1(t)g_2(t) \xleftrightarrow{T} \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_1(q)G_2(m - q). \quad (2.88)$$

Parseval:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^2(t)dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |G(m)|^2. \quad (2.89)$$

Tabel 2.2: Regneregler for reelle periodiske analoge signaler



Figur 2.14: Amplitude og fase for ren tone.

2.5 Signaleksempler for analoge periodiske signaler

Ligesom det er tilfældet ved signaler med endelig energi, er det nyttigt at kende spektret af visse basale signaler med endelig effekt. Dette spektrum kan enten formuleres i fourierrækkesammenhæng eller ved anvendelse af δ -funktioner. Den sidstnævnte metode giver dog teoretiske vanskeligheder ved sådanne begreber som amplitudespektrum, fasespektrum og signaleffekt, da kvadratet på en δ -funktion ikke er en tilladt operation.

2.5.1 Spektrum af en ren tone

Det periodiske analoge signal

$$g(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \theta), \quad (2.90)$$

hvor a , f_0 og θ er reelle, positive konstanter, kaldes en *ren tone*. Dets periodetid er $T = \frac{1}{f_0}$, og dets spektrum indeholder kun 2 komponenter, som det ses af følgende omskrivning

$$g(t) = \frac{1}{2} \left(a e^{j\theta} e^{j2\pi f_0 t} + a e^{-j\theta} e^{-j2\pi f_0 t} \right). \quad (2.91)$$

Man får altså

$$g(t) \xleftrightarrow{T} G(m) = \begin{cases} \frac{1}{2} a e^{\pm j\theta} & \text{for } m = \pm 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (2.92)$$

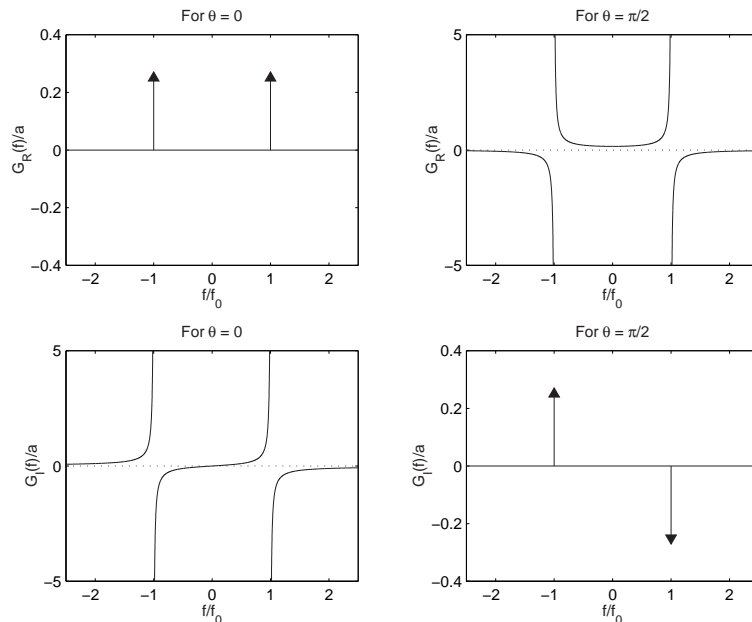
se figur 2.14, hvor $m = \pm 1$ svarer til frekvenserne $f = \pm f_0$. Signalets effekt P er

$$P = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}a^2, \quad (2.93)$$

og denne størrelse er således uafhængig af både f_0 og θ . Sætter man $f_0 = 0$, får signalet den konstante værdi $a \cos(\theta)$. Et sådant signal er et grænsetilfælde af et periodisk signal, hvor periodetiden $T \rightarrow \infty$. Det benævnes et jævnstrømssignal (et DC-signal), og dets spektrum har kun en linie ved $m = 0$ (svarende til $f = 0$).

Ved visse anvendelser har man brug for at betragte en ren tone i sammenhæng med signaler med endelig energi. I sådanne tilfælde kan man fortolke udtrykket for $g(t)$ som anvendelse af frekvensforskydningsreglen på de konstante signaler $\frac{1}{2}a \exp(\pm j\theta)$. Med

$$\frac{1}{2}a \exp(\pm j\theta) \leftrightarrow \frac{1}{2}a \exp(\pm j\theta) \delta(f) \quad (2.94)$$



Figur 2.15: Spektrum af springfunktion moduleret med cosinus startende til $t = 0$.

får man umiddelbart

$$a \cos(2\pi f_0 t + \theta) \leftrightarrow \frac{1}{2} a e^{j\theta} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} a e^{-j\theta} \delta(f + f_0). \quad (2.95)$$

Udtrykkes DC-signalets spektrum på tilsvarende vis, fås³.

$$a \cos(\theta) \leftrightarrow a \cos(\theta) \delta(f). \quad (2.96)$$

Som et eksempel på et signal, hvor man kan have nytte af en spektral beskrivelse med δ -funktioner, kan nævnes

$$g_1(t) = u(t) a \cos(2\pi f_0 t + \theta), \quad (2.97)$$

hvor $u(t)$ er springfunktionen. Med

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \delta(f) - j \frac{1}{2\pi f} \quad (2.98)$$

bliver

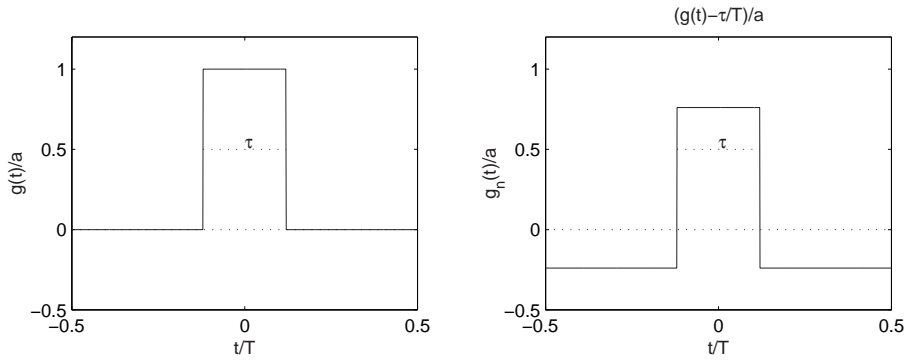
$$G_1(f) = \frac{1}{4} a e^{j\theta} \delta(f - f_0) + \frac{1}{4} a e^{-j\theta} \delta(f + f_0) - j \left[\frac{1}{2} a e^{j\theta} \frac{1}{2\pi(f - f_0)} + \frac{1}{2} a e^{-j\theta} \frac{1}{2\pi(f + f_0)} \right]. \quad (2.99)$$

Dette spektrum, som ses afbildet på figur 2.15, består altså af 2 δ -funktioner ved $f = \pm f_0$ hidrørende fra signalets "periodiske del" samt af en del, som ikke har liniekarakter, og som hidrører fra, at signalet starter til $t = 0$.

³Bemærk, at spektret $G_a(f)$ for et signal $g_a(t)$ med endelig energi udmærket kan være $\neq 0$ ved $f = 0$, uden at signalet derfor har en DC-komponent, jf. identiteten

$$G_a(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) dt.$$

Tilstedeværelsen af en δ -funktion til $f = 0$ i $G_a(f)$ indikerer derimod, at signalet har en DC-komponent.



Figur 2.16: Periodisk firkantsignal.

2.5.2 Spektrum af et periodisk firkantsignal

Det analoge signal $g(t)$, som er specificeret på følgende måde i en periode

$$g(t) = \begin{cases} a & \text{for } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{for } \frac{\tau}{2} < |t| < \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (2.100)$$

hvor a og τ er reelle, positive konstanter, kaldes et periodisk firkantsignal med perioden T (se figur 2.16).

Da signalet er en lige funktion af t , er dets spektrum $G(m)$ reelt, og fås fra (2.2) og (2.36) til

$$G(m) = a \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\pi \tau \frac{m}{T})}{\pi \tau \frac{m}{T}}, \quad (2.101)$$

se figur 2.17. På samme figur ses også amplitudedelen $A_g(m)$ og fasedelen $\phi_g(m)$ af signalets spektrum givet ved

$$A_g(m) = a \frac{\tau}{T} \left| \frac{\sin(\pi \tau \frac{m}{T})}{\pi \tau \frac{m}{T}} \right|, \quad (2.102)$$

$$\phi_g(m) = \begin{cases} -\pi & \text{for } (2p+1)T/\tau < m < (2p+2)T/\tau, & m > 0 \\ 0 & \text{for } 2pT/\tau < |m| < (2p+1)T/\tau \\ \pi & \text{for } (2p+1)T/\tau < |m| < (2p+2)T/\tau, & m < 0. \end{cases} \quad (2.103)$$

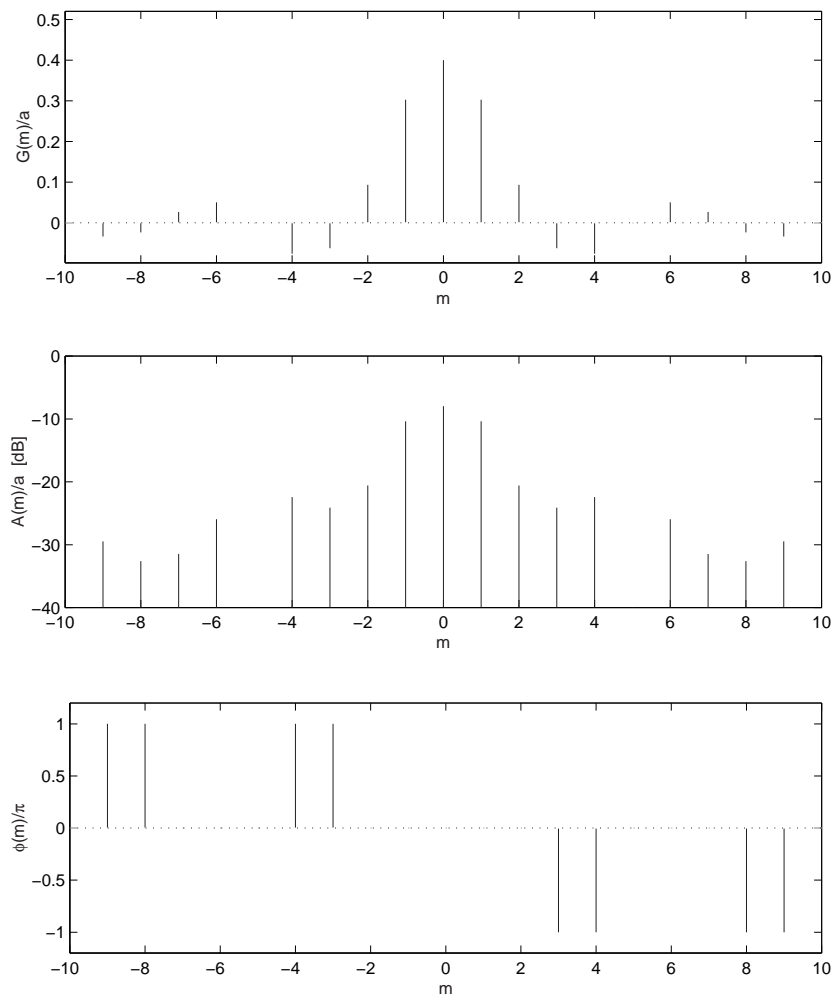
Signalets effekt P findes lettest af

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} a^2 dt = a^2 \frac{\tau}{T}. \quad (2.104)$$

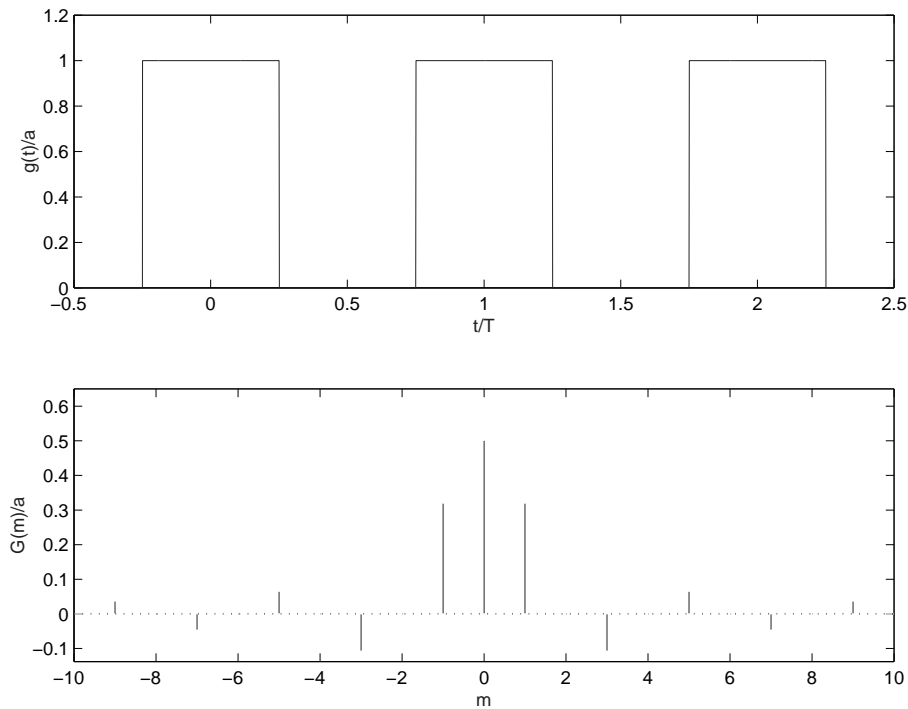
Af udtrykket for $G(m)$ fremgår det, at $G(0) = a\tau/T$, hvilket altså betyder, at $g(t)$ har en DC-komponent. Dette fremgår også umiddelbart af figur 2.16, idet

$$G(0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} a dt. \quad (2.105)$$

Fjernes denne DC-komponent, fås signalet $g_n(t)$, som er vist på figur 3.



Figur 2.17: Spektrum for periodisk firkantsignal med $\tau/T = 0.4$.



Figur 2.18: Firkantsignal og dets spektrum for $\tau/T = 1/2$.

For $\tau = T/2$ fås særligt simple forhold frem, idet faktoren

$$\frac{\sin(m\pi\tau/T)}{m\pi\tau/T} \quad (2.106)$$

har nulpunkter for alle lige værdier af $m \neq 0$. I dette signals spektrum optræder der - foruden DC-komponenten - kun ulige harmoniske, se figur 2.18.

2.5.3 Spektrum af et periodisk trekantsignal

Det periodiske trekantsignal

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\frac{T}{2} < t < 0 \\ a(1 - t/\tau) & \text{for } 0 < t < \tau \\ 0 & \text{for } \tau < t < \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (2.107)$$

hvor a og τ er positive konstanter, har et spektrum $G(m)$, som lettest findes ud fra spektret af det tilsvarende signal med endelig energi, se kap. 2.3.2. Man får da

$$G(m) = \frac{1}{2} \frac{a\tau}{T} \left(\frac{\sin^2(m\pi\tau/T)}{(m\pi\tau/T)^2} + j \frac{1}{m\pi\tau/T} \left(\frac{\sin(m2\pi\tau/T)}{m2\pi\tau/T} - 1 \right) \right). \quad (2.108)$$

Opspaltes $g(t)$ i en lige del $g_l(t)$ og en ulige del $g_u(t)$ givet ved

$$g_l(t) = \begin{cases} \frac{a}{2}(1 - |t|/\tau) & \text{for } |t| < \tau \\ 0 & \text{for } \tau < |t| < \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (2.109)$$

$$g_u(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}a(1 + t/\tau) & \text{for } -\tau < t < 0 \\ \frac{1}{2}a(1 - t/\tau) & \text{for } 0 < t < \tau \\ 0 & \text{for } \tau < |t| < \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (2.110)$$

se figur 2.19, er $g_l(t) \xleftrightarrow{T} G_R(f)$ og $g_u(t) \xleftrightarrow{T} jG_I(f)$.

Signalets effekt P er

$$P = \frac{1}{T} \int_0^\tau a^2(1 - t/\tau)^2 dt = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{\tau}{T}. \quad (2.111)$$

Af udtrykket for $G(m)$ ses det, at man for $\tau = T$ får et signal $g_1(t)$ vist på figur 2.20, som på nær DC-komponenten har et rent imaginært spektrum

$$G_1(m) = \begin{cases} \frac{1}{2}a & \text{for } m = 0 \\ -\frac{ja}{2m\pi} & \text{for } m \neq 0. \end{cases} \quad (2.112)$$

Dette signals DC-komponent tegner sig for 3/4 af signalets samlede effekt. Som det ses, er disse analoge periodiske trekantsignaler ikke båndbegrænsede, hvorfor der ikke findes digitale signaler, som er ækvivalente hermed.

2.6 Spektrum for digitale signaler med endelig energi

Spekret for et digitalt signal med endelig energi $g(n)$ er givet ved

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)e^{-j2\pi fn\Delta T} \quad (2.113)$$

og den tilsvarende inverse transformation ved

$$g(n) = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} G(f)e^{j2\pi fn\Delta T} df \quad (2.114)$$

hvor $f_s = 1/\Delta T$ er samplingfrekvensen. Et signaleksempel er vist på figur 2.21. Bemærk at det digitale signal har et (stykvist) kontinuert spektrum, som er periodisk med perioden f_s , dvs. $G(f) = G(f - m f_s)$.

Spekret for en samplet version af et signal med endelig energi er

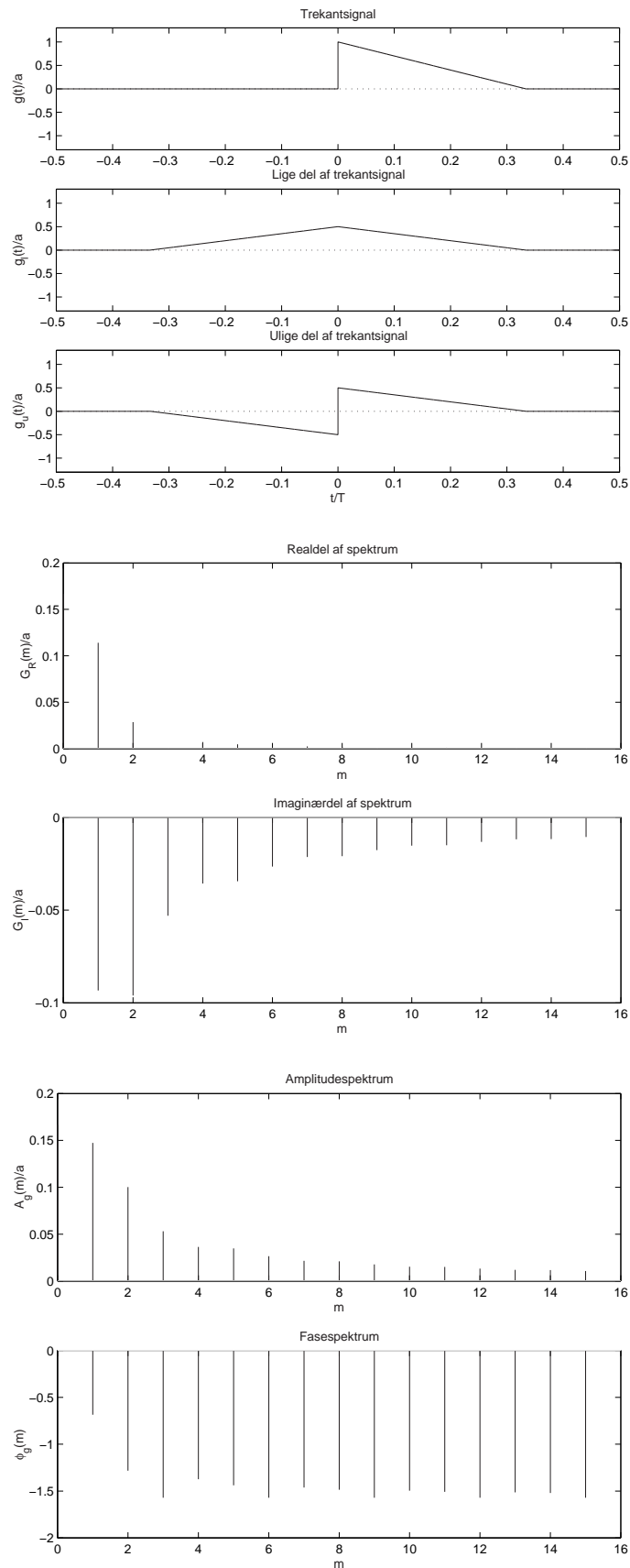
$$\begin{aligned} G(f) &= \frac{1}{\Delta T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_e\left(f - \frac{m}{\Delta T}\right) \\ g(n) &= g_e(n\Delta T). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Spektrene i området fra $-f_s/2$ til $f_s/2$ er her kun ens, hvis $G_e(f)$ ikke har komponenter over $|f| > f_g$ svarende til at samplingfrekvensen overholder samplingsætningen (see afsnit 2.3.7).

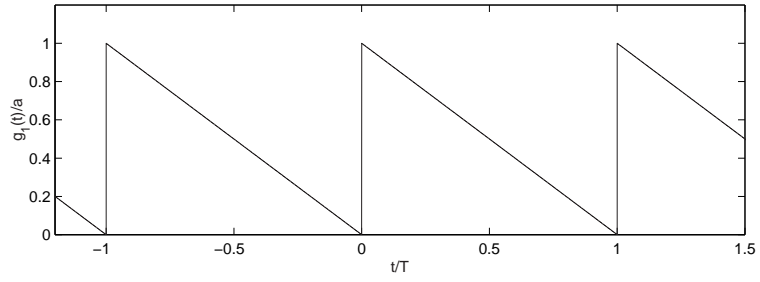
De gængse regler for reelle analoge signaler med endelig effekt er vist i tabel 2.3.

2.7 Signaleksempler for digitale signal med endelig energi

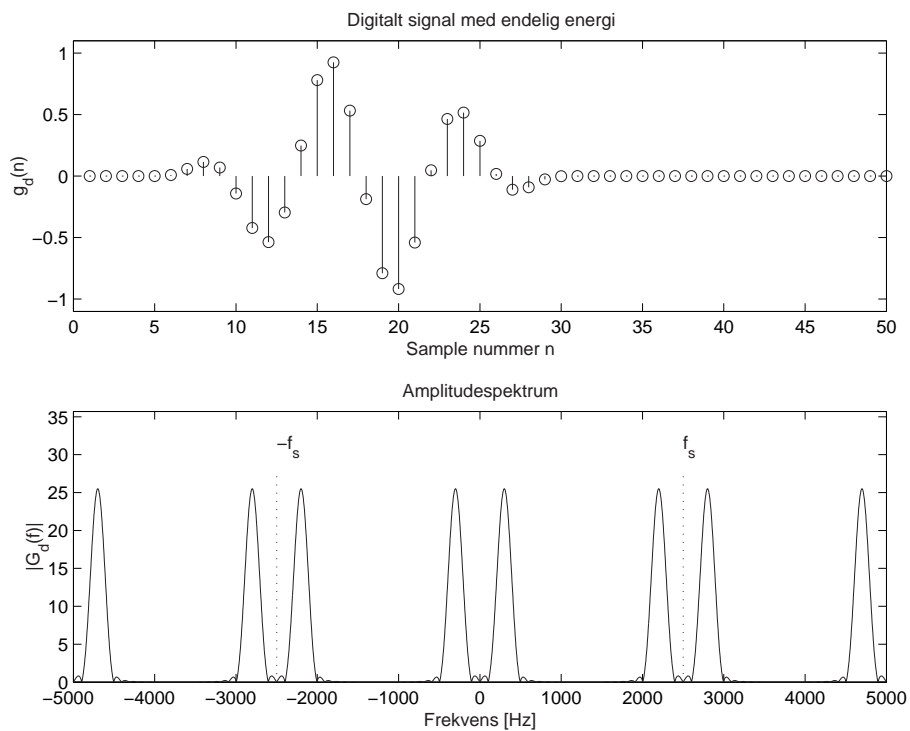
Til hjælp ved praktisk anvendelse af regnereglerne og til anden brug, er der her beregnet spektret af et par ofte benyttede digitale signaler.



Figur 2.19: Trekantsignaler og tilsvarende spektre.



Figur 2.20: Trekantsignal med $\tau = T$.



Figur 2.21: Eksempel på digitalt signal med endelig energi.

Regneregler for reelle digitale signaler med endelig energi

$$g(n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G(f); \quad g_1(n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G_1(f); \quad g_2(n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G_2(f).$$

1. Linearitetsreglen

$$ag_1(n) + bg_2(n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} aG_1(f) + bG_2(f) \quad (a \text{ og } b \text{ konstanter}). \quad (2.116)$$

2. Symmetrireglen er ikke relevant.

3. Tidstransformationsreglen er ikke relevant.

4. Reglen om skift af tidsaksens retning

$$g(-n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G(-f) = G^*(f) \quad (2.117)$$

5. Reglen om forskydning af tidsaksens nulpunkt

$$g(n + n_0) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G(f)e^{j2\pi f n_0 \Delta T} \quad (n_0 \text{ en heltals konstant}). \quad (2.118)$$

6. Reglen om forskydning af frekvensaksens nulpunkt

$$g(n)e^{-j2\pi f_0 n \Delta T} \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G(f + f_0) \quad (f_0 \text{ en konstant}). \quad (2.119)$$

$$g(n) \cos(2\pi f_0 n \Delta T) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}(G(f - f_0) + G(f + f_0)).$$

$$g(n) \sin(2\pi f_0 n \Delta T) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} \frac{1}{2j}(G(f - f_0) - G(f + f_0)).$$

7. Differentiationsreglen er ikke relevant.

8. Foldningsreglen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_1(k)g_2(n - k) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G_1(f)G_2(f) \quad (2.120)$$

og

$$g_1(n)g_2(n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} G_1(s)G_2(f - s)ds \quad (2.121)$$

Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g^2(n) = \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} |G(f)|^2 df \quad (2.122)$$

Tabel 2.3: Regneregler for reelle digitale signaler med endelig energi

2.7.1 Spektrum af den digitale δ -funktion

Den digitale δ -funktion er defineret ved

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (2.123)$$

Dette signals spektrum findes af

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j2\pi f n \Delta T}, \quad (2.124)$$

og dermed fås let fouriertransformationsparret

$$\delta(n) \leftrightarrow 1. \quad (2.125)$$

Det må i denne sammenhæng understreges, at den digitale δ -funktion er et helt sædvanligt digitalt signal i modsætning til den analoge δ -funktion $\delta(t)$, som hører til blandt de generaliserede funktioner. De to δ -funktioner benyttes dog i praksis på stort set samme måde inden for de respektive signaltyper, f.eks. til fremskaffelse af et filters impulssvar.

2.7.2 Spektrum af et digitalt firkantsignal

Signalet $g(n)$, som er givet ved

$$g(n) = \begin{cases} a & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \quad (2.126)$$

hvor N er et helt tal og a en konstant, kaldes et digitalt firkantsignal. Dets spektrum $G(f)$ findes af rækken

$$G(f) = \sum_{n=0}^{N-1} a e^{-j2\pi f n \Delta T}, \quad (2.127)$$

som summeres til

$$G(f) = a \frac{\sin(\pi f N \Delta T)}{\sin(\pi f \Delta T)} e^{-j\pi f (N-1) \Delta T}. \quad (2.128)$$

Opspalttes $G(f)$ i realdel og imaginærdel, fås

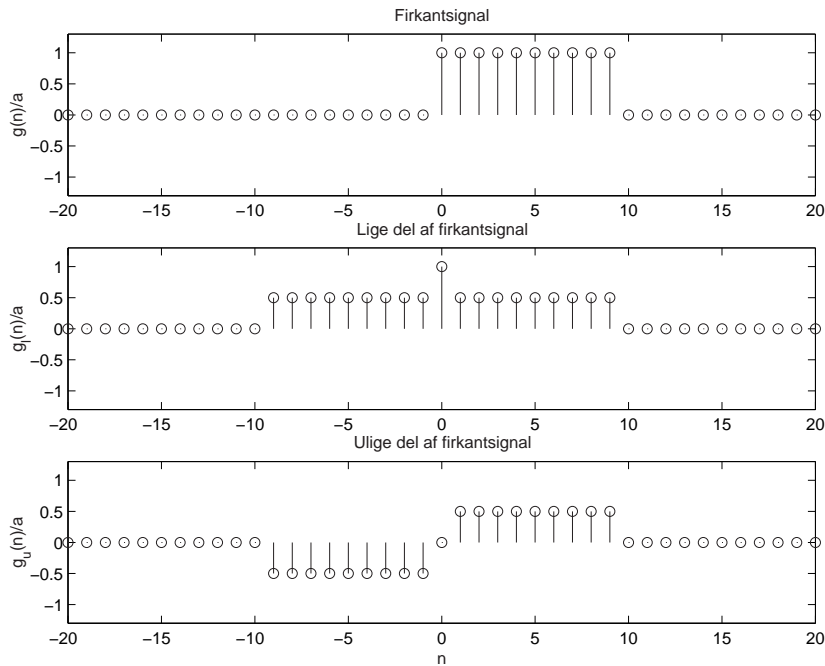
$$\begin{aligned} G_R(f) &= a \frac{\sin(\pi f N \Delta T)}{\sin(\pi f \Delta T)} \cos(\pi f (N-1) \Delta T) \\ G_I(f) &= -a \frac{\sin(\pi f N \Delta T)}{\sin(\pi f \Delta T)} \sin(\pi f (N-1) \Delta T), \end{aligned} \quad (2.129)$$

som begge ses afbildet på figur 2.23. Bemærk, at begge disse udtryk naturligvis er i overensstemmelse med signalets opspaltning i en lige del og en ulige del (se figur 2.22). Spektrets amplitudedel og fasedel findes på den sædvanlige måde, og disse to dele er også vist på figur 2.23.

Spektret af det digitale firkantsignal kan også udtrykkes på formen

$$G(f) = aN \frac{\sin(\pi f N \Delta T)}{\pi f N \Delta T} \cdot \frac{\pi f \Delta T}{\sin(\pi f \Delta T)} \cdot e^{-j\pi f (N-1) \Delta T}, \quad (2.130)$$

hvilket understreger relationen til det analoge firkantsignal.



Figur 2.22: Digitalt firkantsignal.

2.8 Spektrum for digitale periodiske signaler

Den diskrete fourierrække for et periodisk digitalt signal med perioden N er givet ved

$$G(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-j2\pi \frac{mn}{N}} \quad (2.131)$$

og den tilsvarende inverse transformation ved

$$g(n) = \sum_{m=0}^{N-1} G(m) e^{j2\pi \frac{mn}{N}} \quad (2.132)$$

Bemærk at samplingtidsintervallet ikke indgår i disse udtryk, men implicit er fourierrækken naturligvis afhængig af samplingfrekvensen. Et signaleksempel er vist på figur 2.24. For denne signaltpe er både signal og spektrum diskret. Frekvensen, der svarer til den harmoniske komponent m , er lig $m/\Delta T$.

En periodisk version af et digitalt signal kan skabes ved

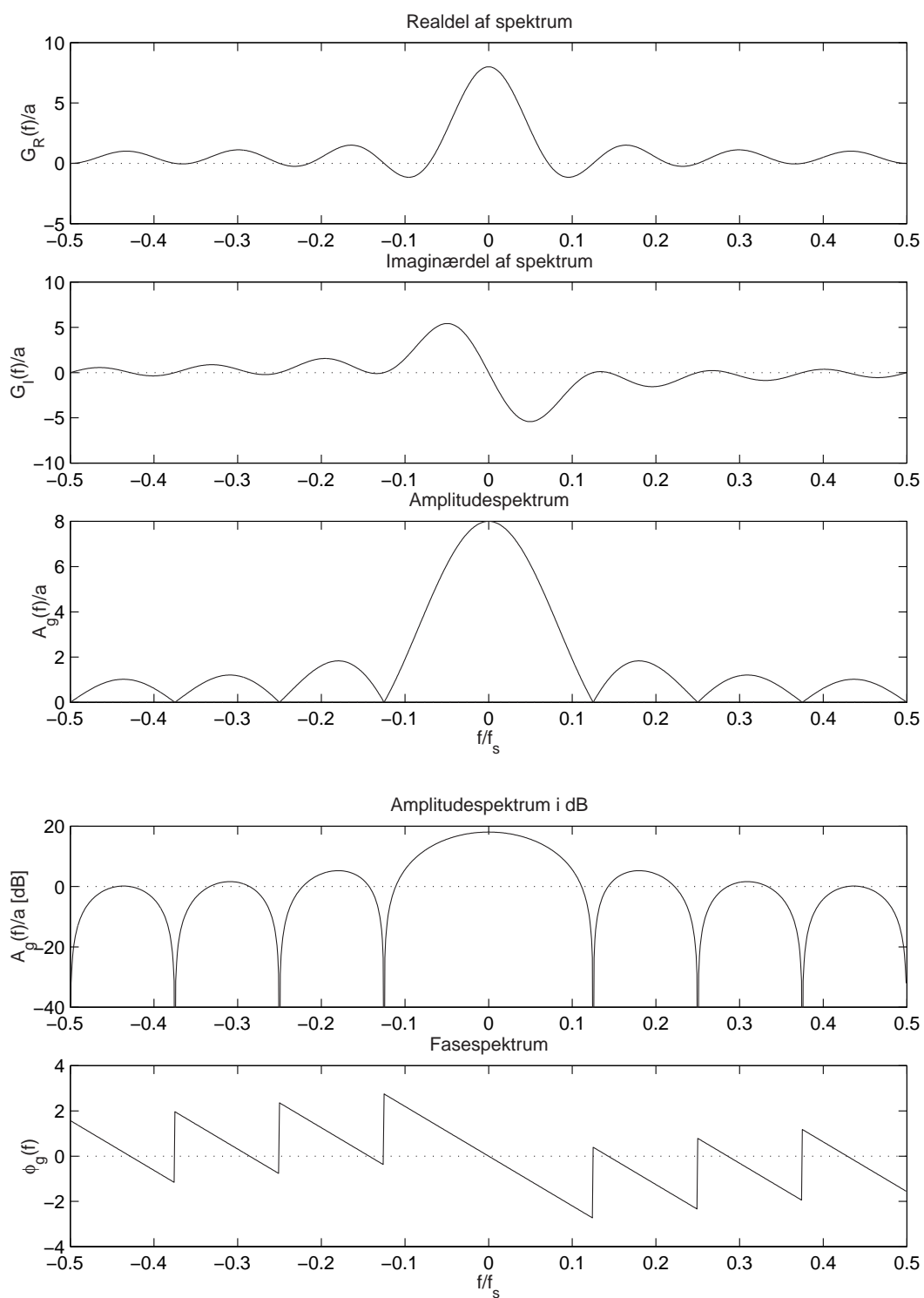
$$g_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n - kN) \quad (2.133)$$

hvorved forierrækken bliver givet ved

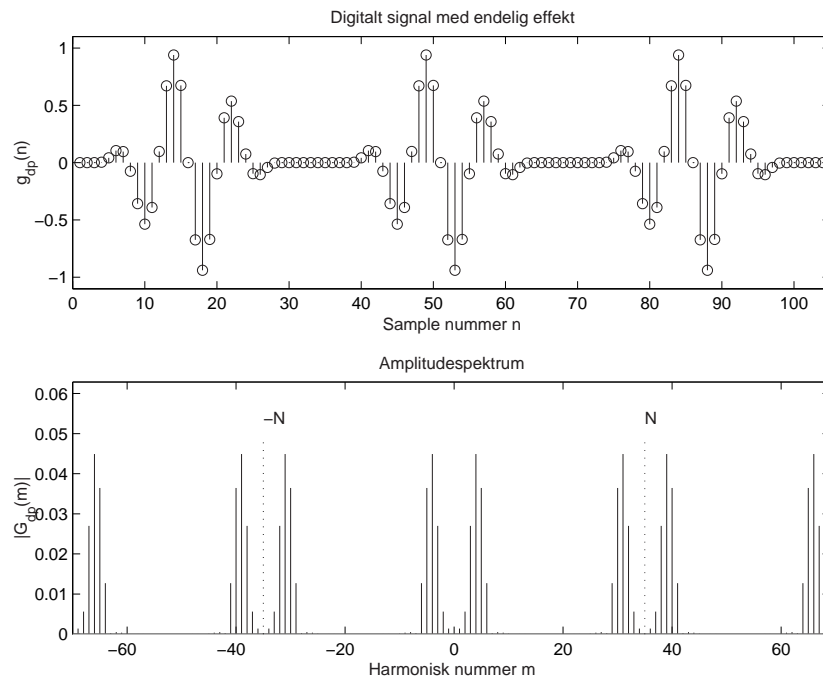
$$G_p(m) = \frac{1}{N} G\left(\frac{m}{N\Delta T}\right) \quad (2.134)$$

Herved kan også ses hvordan sampling frekvensen forsvinder fra beregningen af spektret. Hvis f erstattes med $m/(N\Delta T)$ i eksponentialfaktoren i (2.113) fås

$$e^{-j2\pi \frac{m}{N\Delta T} n\Delta T} = e^{-j2\pi \frac{mn}{N}} \quad (2.135)$$



Figur 2.23: Spektrum for digitalt firkantsignal med $N = 8$.



Figur 2.24: Eksempel på digitalt signal med endelig effekt.

Tabel 2.4, side 42, rummer en sammenstilling af regneregler for periodiske digitale signaler og deres spektre. Også disse regler kan let udledes af relationerne mellem $g(n)$ og $G(m)$. Det antages her i lighed med tidligere, at $g(n)$ er reel, og dette har til følge, at

$$G(m) = G^*(-m). \quad (2.136)$$

En opspaltning af et vilkårligt periodisk digitalt signal i en lige del $g_l(n)$ og en ulige del $g_u(n)$ giver

$$\begin{aligned} g_l(n) &\stackrel{N}{\leftrightarrow} G_R(m) \\ g_u(n) &\stackrel{N}{\leftrightarrow} jG_I(m). \end{aligned} \quad (2.137)$$

Som det fremgår af tabellen, findes der en symmetriregel for diskrete fouriertransformerede, således som det også er tilfældet ved analoge signaler med endelig energi. Derimod har hverken tidstransformation eller differentiation nogen mening for periodiske digitale signaler.

Et digitalt periodisk signals samlede effekt p beregnes af

$$p = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g^2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} |G(m)|^2. \quad (2.146)$$

Dets RMS-værdi er defineret som ved periodiske analoge signaler

$$\text{RMS}\{g(n)\} = \sqrt{p}. \quad (2.147)$$

Regneregler for reelle periodiske digitale signaler

$$g(n) \stackrel{N}{\leftrightarrow} G(m); \quad g_1(n) \stackrel{N}{\leftrightarrow} G_1(m); \quad g_2(n) \stackrel{N}{\leftrightarrow} G_2(m).$$

1. Linearitetsreglen

$$ag_1(n) + bg_2(n) \stackrel{N}{\leftrightarrow} aG_1(m) + bG_2(m) \quad (a \text{ og } b \text{ konstanter}). \quad (2.138)$$

2. Symmetrireglen

$$G(n) \stackrel{N}{\leftrightarrow} \frac{1}{N}g(-m). \quad (2.139)$$

3. Tidstransformationsreglen er ikke relevant.

4. Reglen om skift af tidsaksens retning

$$g(-n) \stackrel{N}{\leftrightarrow} G(-m) = G^*(m). \quad (2.140)$$

5. Reglen om forskydning af tidsaksens nulpunkt

$$g(n + n_0) \stackrel{N}{\leftrightarrow} G(m)e^{j2\pi\frac{m}{N}n_0} \quad (n_0 \text{ en heltallig konstant}). \quad (2.141)$$

6. Reglen om forskydning af frekvensaksens nulpunkt

$$g(n)e^{-j2\pi\frac{m_0}{N}n} \stackrel{N}{\leftrightarrow} G(m + m_0) \quad (m_0 \text{ en heltallig konstant}). \quad (2.142)$$

$$g(n) \cos(2\pi\frac{m_0}{N}n) \stackrel{N}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}(G(m - m_0) + G(m + m_0))$$

$$g(n) \sin(2\pi\frac{m_0}{N}n) \stackrel{N}{\leftrightarrow} \frac{1}{2j}(G(m - m_0) - G(m + m_0))$$

7. Differentiationsreglen er ikke relevant

8. Foldningsreglen

$$\frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} g_1(q)g_2(n - q) \stackrel{N}{\leftrightarrow} G_1(m)G_2(m) \quad (2.143)$$

$$g_1(n)g_2(n) \stackrel{N}{\leftrightarrow} \sum_{q=0}^{N-1} G_1(q)G_2(m - q). \quad (2.144)$$

Parseval:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g^2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} |G(m)|^2. \quad (2.145)$$

Tabel 2.4: Regneregler for reelle periodiske digitale signaler

2.9 Signaleksempler for digitale periodiske signaler

2.9.1 Spektrum af en ren tone

Det digitale rentonesignal er givet ved udtrykket

$$g(n) = a \cos(2\pi n/N + \theta), \quad (2.148)$$

hvor a , N og θ er positive konstanter. Perioden N skal være et helt tal, såfremt periodicitetsbetingelsen $g(n + N) = g(n)$ skal være opfyldt for alle n . Dette betyder, at ikke alle frekvenser kan realiseres. De mulige frekvenser f_q beregnes af

$$f_q = \frac{1}{q\Delta T}, \quad (2.149)$$

hvor q er et helt tal > 2 . Signalets spektrum $G(m)$ er

$$G(m) = \begin{cases} \frac{1}{2}ae^{\pm j\theta}, & m = \pm 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (2.150)$$

Der er ækvivalens mellem det digitale rentonesignal og det analoge rentonesignal med samme frekvens. Det digitale DC-signal er givet ved, at $g(n)$ har samme konstante værdi a for alle n . Dets spektrum er

$$G(m) = \begin{cases} a & \text{for } m = 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (2.151)$$

2.9.2 Spektrum af et periodisk firkantsignal

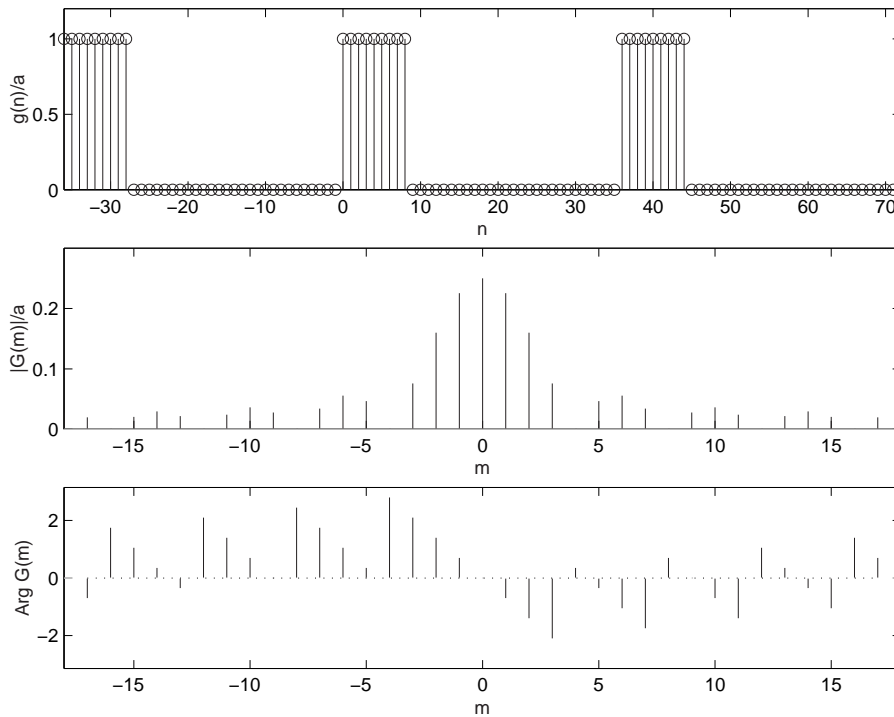
Det periodiske digitale firkantsignal $g(n)$ med perioden N er givet ved

$$g(n) = \begin{cases} a & \text{for } 0 \leq n \leq N_0 - 1 \\ 0 & \text{for } N_0 \leq n \leq N - 1 \end{cases} \quad (2.152)$$

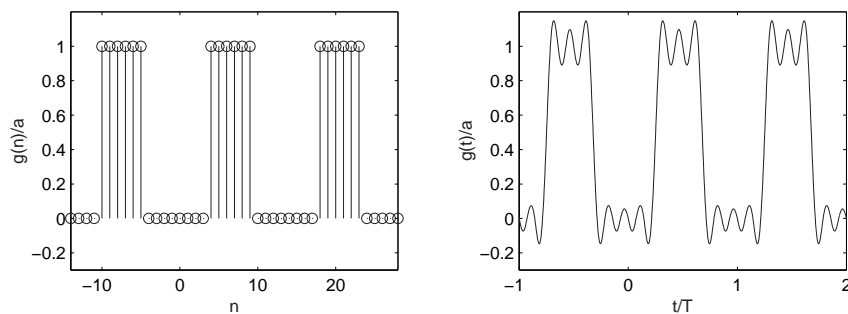
har spektret

$$G(m) = a \frac{N_0 \sin(m\pi N_0/N)}{N N_0 \sin(m\pi/N)} e^{-jm\pi(N_0-1)/N}, \quad (2.153)$$

se figur 2.25. Som det ses, adskiller dette spektrums form sig noget fra formen af det analoge firkantsignals spektrum. Dette er en naturlig følge af, at der ikke er ækvivalens mellem de to signaler, da det analoge signals spektrum ikke er båndbegrænset. Det ækvivalente analoge signal kan ses på figur 2.26. Bemærk i øvrigt, at $g(n)$ kun kan blive en lige funktion af n , såfremt signalets varighed N_0 er et ulige tal.



Figur 2.25: Spektrum for periodisk digital firkant.



Figur 2.26: Periodisk digital firkant og ækvivalent analogt signal.

Komplekse signaler

I forbindelse med en række signalbehandlingsopgaver er det hensigtsmæssigt at benytte komplekse signaler, f.eks. ved karakterisering af den diskrete fourier transformation (se kapitel 4) og ved måling af blodets hastighed (se afsnit 9.2).

Et komplekst signal $g(t)$ er et signalpar $\{g_R(t), g_I(t)\}$, hvor $g_R(t)$ og $g_I(t)$ er sædvanlige reelle signaler, således at

$$g(t) = g_R(t) + jg_I(t). \quad (3.1)$$

For et komplekst digitalt signal gælder tilsvarende

$$g(n) = g_R(n) + jg_I(n). \quad (3.2)$$

Analogt med begreberne, som benyttes ved det komplekse spektrum, kan man også notere komplekse signaler på formen

$$g(t) = a_g(t) \exp(j\psi_g(t)) \quad \text{og} \quad g(n) = a_g(n) \exp(j\psi_g(n)), \quad (3.3)$$

hvor

$$\begin{aligned} a_g(t) &= \sqrt{g_R^2(t) + g_I^2(t)}, \\ a_g(n) &= \sqrt{g_R^2(n) + g_I^2(n)}, \\ \psi_g(t) &= \arctan\left(\frac{g_I(t)}{g_R(t)}\right), \\ \psi_g(n) &= \arctan\left(\frac{g_I(n)}{g_R(n)}\right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

$a_g(t)$ og $a_g(n)$ benævnes undertiden indhyllingskurven for $g(t)$ henholdsvis $g(n)$.

Sådanne komplekse signaler er ofte nyttige i praksis, idet visse signalbegreber og visse former for signalmanipulation lettere kan overskues, når dette hjælpemiddel bringes i anvendelse. Blandt de komplekse signaler spiller de analytiske en fremtrædende rolle, hvorfor denne delmængde omtales nærmere i kap. 3.2.

3.1 Spektrum af et komplekst signal

Spektret af et komplekst signal findes ved anvendelse af de sædvanlige udtryk for fouriertransformationsspar, se kap. 2.2 og kap. 2.6.

En følge af, at $g(t)$ eller $g(n)$ er kompleks, er, at de sædvanlige lige-ulige egenskaber ved realdelen og imaginærdelen (samt ved amplitudedelen og fasedelen) af spektret går tabt. For komplekse signaler haves

$$\underline{g^*(t)} \leftrightarrow \underline{G^*(-f)} \quad \text{og} \quad \underline{g^*(n)} \leftrightarrow \underline{G^*(-f)}, \quad (3.5)$$

som det let kan vises. Udtrykkes det komplekse analoge signal $g(t)$ på formen

$$g(t) = g_1(t) + jg_2(t), \quad (3.6)$$

hvor $g_1(t)$ og $g_2(t)$ er reelle signaler og $g_1(t) \leftrightarrow G_1(f)$ og $g_2(t) \leftrightarrow G_2(f)$, fås

$$g_1(t) = \frac{1}{2}(g(t) + g^*(t)) \leftrightarrow G_1(f) = \frac{1}{2}(G(f) + G^*(-f)) \quad (3.7)$$

og

$$g_2(t) = -j\frac{1}{2}(g(t) - g^*(t)) \leftrightarrow G_2(f) = -j\frac{1}{2}(G(f) - G^*(-f)). \quad (3.8)$$

Bruger man index R som betegnelse for ”realdelen af” og index I for ”imaginærdelen af”, giver nogle enkle regninger udtrykkene

$$\begin{aligned} G_R(f) &= G_{1R}(f) - G_{2I}(f) \\ G_I(f) &= G_{1I}(f) + G_{2R}(f). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tilsvarende relationer kan selvfølgelig opskrives for komplekse digitale signaler.

3.1.1 Regneregler for komplekse signaler

Det grundlæggende sæt af regneregler for fouriertransformationspar gælder naturligvis også for komplekse signaler. I tabel 3.1 ses en kort oversigt over regnereglerne for de analoge signaler og i tabel 3.2 tilsvarende regler for de digitale signaler. Af tabel 3.1 ses det specielt, at man nu får en mere vidtgående symmetri mellem et komplekst analogt signal og dets spektrum.

3.1.2 Lineær bearbejdning af komplekse signaler

Såfremt et komplekst signal skal underkastes en lineær bearbejdning, f.eks. en filtrering med et tidsinvariant lineært system, modsvarer dette naturligvis en filtrering af signalets real- og imaginærdel med det pågældende filter. Er filtrets impuls svar reelt, bliver der altså tale om to filtreringer, hvorimod man med komplekst impuls svar må udføre fire reelle filtreringer, se figur 3.1.

Som eksempel på et ofte anvendt filter¹ med komplekst impuls svar kan nævnes

$$h_m(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} e^{jm\frac{2\pi}{N}n} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}. \quad (3.26)$$

Filtrets overføringsfunktion, som let findes til

$$H_m(f) = \frac{1}{N} \frac{\sin \pi(fN\Delta T - m)}{\sin \pi(f\Delta T - m/N)} e^{-j\pi(N-1)(f\Delta T - m/N)}, \quad (3.27)$$

er en funktion af parameteren m . Den ses afbildet på figur 3.2 tillige med filtrets impuls svar.

¹Jf. den diskrete fouriertransformation, se kap. 4.

Regneregler for komplekse analoge signaler

$$g(t) \leftrightarrow G(f); \quad g_1(t) \leftrightarrow G_1(f); \quad g_2(t) \leftrightarrow G_2(f)$$

1. Linearitetsreglen

$$ag_1(t) + bg_2(t) \leftrightarrow aG_1(f) + bG_2(f), \quad a \text{ og } b \text{ konstanter} \quad (3.10)$$

2. Symmetrireglen

$$G(t) \leftrightarrow g(-f) \quad (3.11)$$

3. Tidstransformationsreglen

$$g(kt) \leftrightarrow \frac{1}{|k|} G\left(\frac{f}{k}\right), \quad k \text{ en positiv, reel konstant} \quad (3.12)$$

4. Reglen om skift af tidsaksens retning

$$g(-t) \leftrightarrow G(-f) \quad (3.13)$$

5. Reglen om forskydning af tidsaksens nulpunkt

$$g(t + t_0) \leftrightarrow G(f)e^{j2\pi ft_0}, \quad t_0 \text{ en reel konstant} \quad (3.14)$$

6. Reglen om forskydning af frekvensaksens nulpunkt

$$g(t)e^{-j2\pi f_0 t} \leftrightarrow G(f + f_0), \quad f_0 \text{ en reel konstant} \quad (3.15)$$

7. Differentiationsreglen

$$\frac{d^p g(t)}{dt^p} \leftrightarrow (j2\pi f)^p G(f), \quad (-j2\pi t)^p g(t) \leftrightarrow \frac{d^p G(f)}{df^p}, \quad p \text{ er et helt tal} \quad (3.16)$$

8. Foldningsreglen

$$g_1(t) * g_2(t) \leftrightarrow G_1(f)G_2(f); \quad g_1(t)g_2(t) \leftrightarrow G_1(f) * G_2(f) \quad (3.17)$$

Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f)G_2^*(f)df \quad (3.18)$$

Tabel 3.1: Regneregler for komplekse analoge signaler

Regneregler for komplekse digitale signaler

$$g(n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G(f); \quad g_1(n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G_1(f); \quad g_2(n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G_2(f)$$

1. Linearitetsreglen

$$ag_1(n) + bg_2(n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} aG_1(f) + bG_2(f), \quad a \text{ og } b \text{ konstanter} \quad (3.19)$$

2. Symmetrireglen er ikke relevant

3. Tidstransformationsreglen er ikke relevant.

4. Reglen om skift af tidsaksens retning

$$g(-n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G(-f) \quad (3.20)$$

5. Reglen om forskydning af tidsaksens nulpunkt

$$g(n + n_0) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G(f)e^{j2\pi f n_0 \Delta T}, \quad n_0 \text{ et helt tal} \quad (3.21)$$

6. Reglen om forskydning af frekvensaksens nulpunkt

$$g(n)e^{-j2\pi f_0 n \Delta T} \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G(f + f_0), \quad f_0 \text{ en reel konstant} \quad (3.22)$$

7. Differentiationsreglen

$$(j2\pi n \Delta T)^p g(n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} \frac{d^p G(f)}{df^p}, \quad p \text{ et helt tal} \quad (3.23)$$

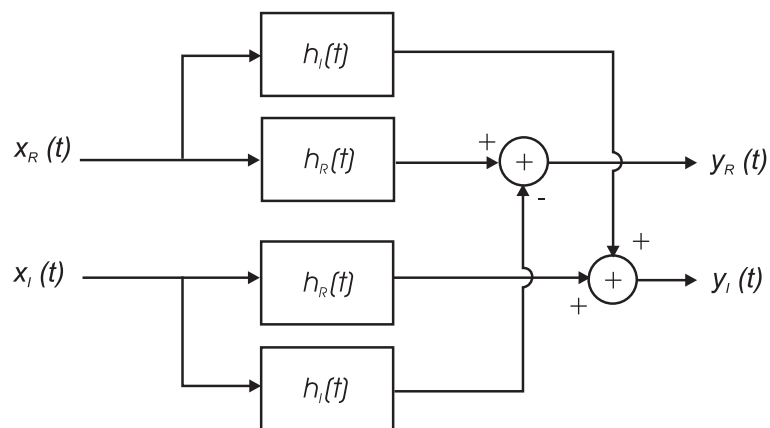
8. Foldningsreglen

$$g_1(n) * g_2(n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G_1(f)G_2(f); \quad g_1(n)g_2(n) \stackrel{\Delta T}{\leftrightarrow} G_1(f) * G_2(f) \quad (3.24)$$

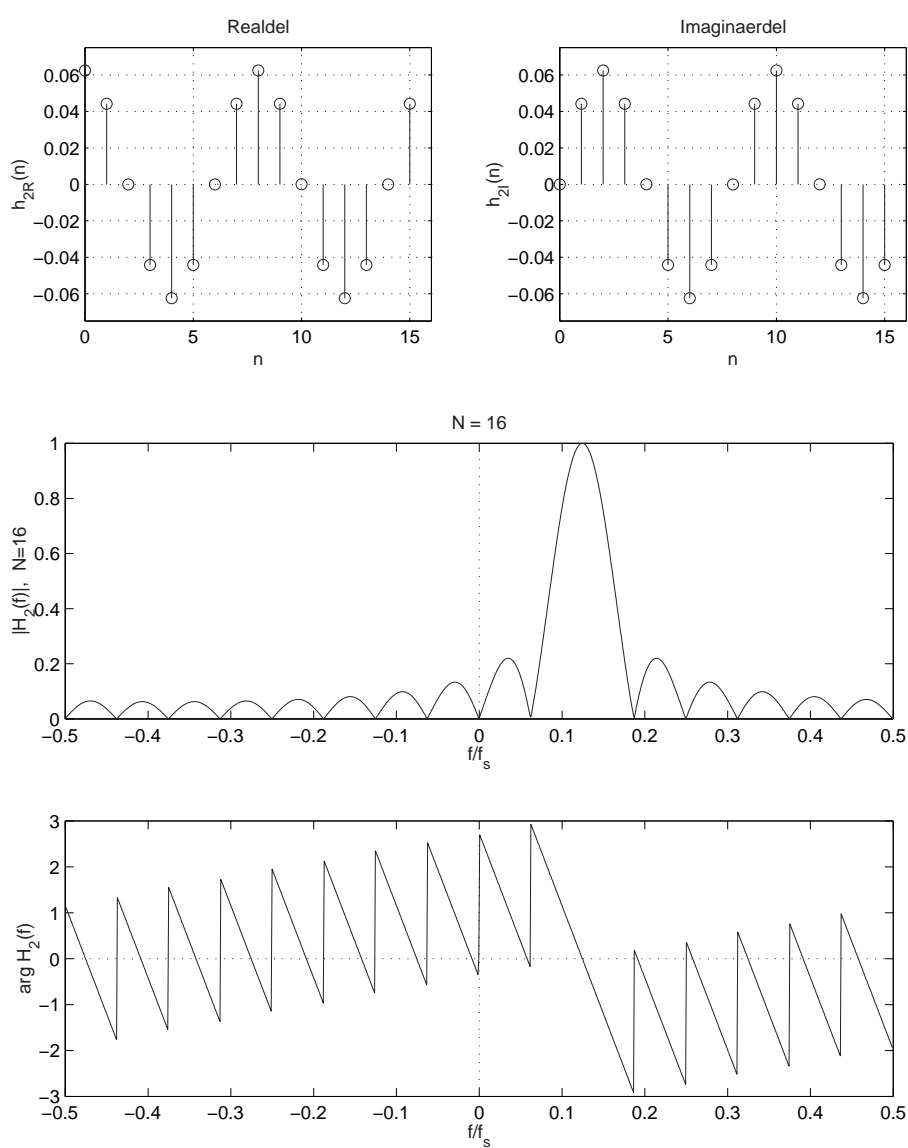
Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_1(n)g_2^*(n) = \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} G_1(f)G_2^*(f)df \quad (3.25)$$

Tabel 3.2: Regneregler for komplekse digitale signaler



Figur 3.1: Filtrering af komplekse signaler.



Figur 3.2: Impulssvar og overføringsfunktion for komplekst filter til diskret fouriertransformation.

3.2 Analytiske signaler

Et analytisk signal er et signal, hvis spektrum er "ensidigt". Dette betyder for analoge signaler, at dets spektrum $\equiv 0$ for $f > 0$ eller $f < 0$, hvorimod det for digitale signaler, hvis spektre er periodiske, indebærer, at spektret enten er $\equiv 0$ for $-f_g < f < 0$ og i de hertil svarende dele af det periodiske spektrum, eller for $0 < f < f_g$ samt i de til dette område svarende dele af spektret. Den ovenfor anførte betingelse på et analytisk signals spektrum giver et bånd mellem realdelen og imaginærdelen af det komplekse signal.

3.2.1 Analytiske analoge signaler

Tager man udgangspunkt i et reelt signal $g(t)$ med spektret $G(f)$, vil der om det til $g(t)$ svarende analytiske signal $z_g(t)$ gælde, at

$$z_g(t) \leftrightarrow Z_g(f) = \begin{cases} 2G(f) & \text{for } f > 0 \\ G(0) & \text{for } f = 0 \\ 0 & \text{for } f < 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Af dette udtryk ses det umiddelbart, at²

$$Z_g(f) = [1 + \text{sgn}(f)]G(f). \quad (3.29)$$

Da $j \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow \text{sgn}(f)$, er dette ensbetydende med

$$z_g(t) = (\delta(t) + j \frac{1}{\pi t}) * g(t). \quad (3.30)$$

Indføres her

$$g_H(t) = g(t) * \frac{1}{\pi t}, \quad (3.31)$$

som benævnes den hilberttransformerede af $g(t)$, ses det, at

$$z_g(t) = g(t) + jg_H(t). \quad (3.32)$$

Bemærk, at $z_g^*(t)$ også er analytisk med spektret

$$Z_g^*(-f) = \begin{cases} 0 & \text{for } f > 0 \\ G(0) & \text{for } f = 0 \\ 2G(f) & \text{for } f < 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

og at man følgelig har, at

$$g(t) = \frac{1}{2}(z_g(t) + z_g^*(t)). \quad (3.34)$$

Skriver man $z_g(t)$ på formen

$$z_g(t) = a_z(t) \exp(j\psi_z(t)) \quad (3.35)$$

vil

$$g(t) = a_z(t) \cos(\psi_z(t)) \quad \text{og} \quad g_H(t) = a_z(t) \sin(\psi_z(t)). \quad (3.36)$$

Såfremt et analytisk signal $z_g(t)$ filtreres med et filter med reelt impulssvar $h(t)$, vil udgangssignalet $y(t)$ fra filtret være givet ved

$$y(t) = h(t) * z_g(t) = h(t) * g(t) + jh(t) * g_H(t). \quad (3.37)$$

² $\text{sgn}(f)$ angiver fortegnfunktionen, som giver $+1$ for $f > 0$, -1 for $f < 0$ og 0 for $f = 0$.

Betegnes den hilberttransformerede af $h(t)$ med $h_H(t)$, får man umiddelbart, at

$$y(t) = g(t) * (h(t) + jh_H(t)) = g(t) * z_h(t). \quad (3.38)$$

Denne relation er undertiden nyttig at anvende, når man ønsker at arbejde med analytiske signaler, og der blot foreligger et reelt signal som startgrundlag. Bemærk, at $h_H(t)$ normalt er akausal.

Anvender man symmetrireglen på de analytiske signaler, kan man konstatere, at realdelen og imaginærdelen af et kausalt signals spektrum er hinandens hilberttransformerede. Denne og en række andre egenskaber for hilberttransformationen kan finde i tabel 3.3. I tabellen angiver \mathcal{H} hilberttransformation og $\tilde{g}(t) = \mathcal{H}\{g(t)\}$.

3.2.2 Analytiske digitale signaler

Benyttes i dette tilfælde et reelt digitalt signal $g(n) \leftrightarrow G(f)$ som udgangspunkt, vil spektret af det hertil svarende analytiske signal³ $z_g(n)$ være givet ved

$$z_g(n) \leftrightarrow Z_g(f) = \begin{cases} 2G(f) & \text{for } 2pf_g < f < (2p+1)f_g \\ G(f) & \text{for } f = 2pf_g \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \quad (3.49)$$

hvor p er et helt tal. Til spektret

$$\begin{cases} 1 & \text{for } 2pf_g < f < (2p+1)f_g \\ 0 & \text{for } f = 2pf_g \\ -1 & \text{for } +(2p-1)f_g < f < 2pf_g \end{cases} \quad (3.50)$$

svarer signalet

$$j \frac{2}{n\pi} \sin^2(n \frac{\pi}{2}), \quad (3.51)$$

hvorfor man straks får

$$z_g(n) = (\delta(n) + j \frac{2}{n\pi} \sin^2(n \frac{\pi}{2})) * g(n). \quad (3.52)$$

I analogi med forholdene i kap. 3.2.1 benævnes

$$g_H(n) = g(n) * \frac{2}{n\pi} \sin^2(n \frac{\pi}{2}) \quad (3.53)$$

den hilberttransformerede af $g(n)$, og man har da

$$z_g(n) = g(n) + jg_H(n). \quad (3.54)$$

For digitale filtre med reelt impulssvar $h(n)$ gælder på lignende vis som anført i kap. 3.2.1 at

$$h(n) * z_g(n) = g(n) * z_h(n), \quad (3.55)$$

hvor $z_h(n) = h(n) + jh_H(n) = h(n) + jh(n) * \frac{2}{n\pi} \sin^2(n \frac{\pi}{2})$.

³Formelt set kommer man i matematiske vanskeligheder, når man overfører begrebet analytisk signal til de digitale signaler. En stor del af disse problemer kan imidlertid omgås, såfremt man på passende vis anvender, at der til et digitalt signal svarer et ækvivalent analogt signal.

Egenskaber for hilberttransformationen

1. Linearitet

$$\mathcal{H}\{ag_1(t) + bg_2(t)\} = a\tilde{g}_1(t) + b\tilde{g}_2(t), \quad a \text{ og } b \text{ konstanter} \quad (3.39)$$

2. Forskydning af tidsaksens nulpunkt

$$\mathcal{H}\{g(t + t_0)\} = \tilde{g}(t + t_0), \quad t_0 \text{ en reel konstant} \quad (3.40)$$

3. Hilberttransformeret af hilberttransformeret

$$\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{g(t)\}\} = -g(t), \quad (3.41)$$

4. Invers hilberttransformation

$$x(t) = \mathcal{H}^{-1}\{g(t)\} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{g}(t)}{\pi(t-u)} du = \tilde{g}(t) * \frac{-1}{\pi t} \quad (3.42)$$

5. Lige/ulige egenskab

$$\begin{aligned} g(t) \text{ lige} &\Leftrightarrow \tilde{g}(t) \text{ ulige} \\ g(t) \text{ ulige} &\Leftrightarrow \tilde{g}(t) \text{ lige} \end{aligned} \quad (3.43)$$

6. Energibevarelse

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}^2(t) dt \quad (3.44)$$

7. Ortogonalitet

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\tilde{g}(t) dt = 0 \quad (3.45)$$

8. Modulation

$$\mathcal{H}\{g(t) \cos(2\pi f_0 t)\} = g(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (3.46)$$

hvis

$$G(f) = \begin{cases} G(f) & |f| \leq F, f_0 > F \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

9. Foldning

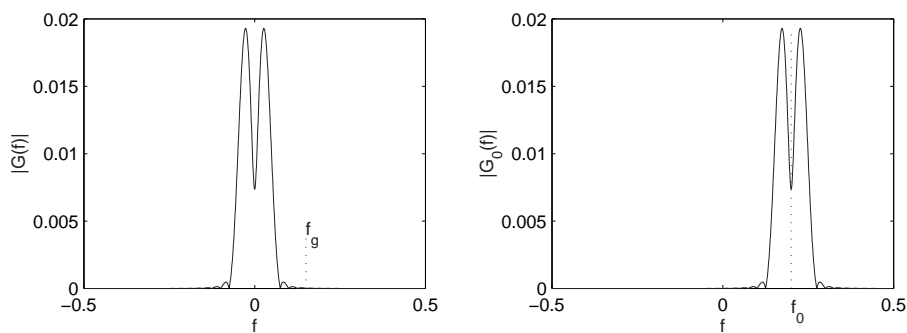
$$\mathcal{H}\{g(t) * h(t)\} = g(t) * \tilde{h}(t) = \tilde{g}(t) * h(t) \quad (3.47)$$

10. Spektrum

$$\mathcal{H}\{G_R(f)\} = -G_I(f), \quad \mathcal{H}\{G_I(f)\} = G_R(f) \quad (3.48)$$

hvor $g(t) \leftrightarrow G(f) = G_R(f) + jG_I(f)$ og $g(t)$ er kausal.

Tabel 3.3: Egenskaber for hilberttransformationen.



Figur 3.3: Konstruktion af analytisk signal.

3.3 Øjeblikksamplitude og øjeblikksfrekvens

For et båndbegrænset reelt signal $g(t)$ med øvre grænsefrekvens f_g gælder der det særlige, at man ved anvendelse af reglen om forskydning af f -aksens nulpunkt får et analytisk signal, når forskydningen $|f_0| > f_g$, se eksemplet på figur 3.3. Man finder altså, at det komplekse signal $z_0(t) = g(t)e^{j2\pi f_0 t}$ er analytisk ($|f_0| > f_g$). Med

$$z_0(t) = g_0(t) + jg_{0H}(t), \quad (3.56)$$

hvor $g_{0H}(t)$ er den hilberttransformerede af det reelle signal $g_0(t)$, fås da umiddelbart

$$g_0(t) = g(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{og} \quad g_{0H}(t) = g(t) \sin(2\pi f_0 t). \quad (3.57)$$

Antager man nu, at $\underline{g(t) \geq 0}$, ses det straks, at

$$a_z(t) = g(t) \quad \text{og} \quad \psi_z(t) = 2\pi f_0 t. \quad (3.58)$$

Øjeblikksamplituden af $z_0(t)$ er da $g(t)$, og størrelsen $\psi'_z(t)/2\pi$ kan siges at være signalets øjeblikksfrekvens, se eksemplet på figur 3.4.

Opgives betingelsen på $g(t)$ således, at $\underline{g(t)}$ kan være både positiv og negativ, bliver øjeblikksamplituden $a_z(t) = |g(t)|$, og fasedelen af det analytiske signal $\psi_z(t)$ vil få spring på $\pm\pi$ til de tidspunkter, hvor $g(t)$ skifter fortegn. Det vil dog stadig være således, at $\psi'_z(t)$ vil være proportional med øjeblikksfrekvensen, når der ses bort fra diskontinuitetspunkterne (se figur 3.5).

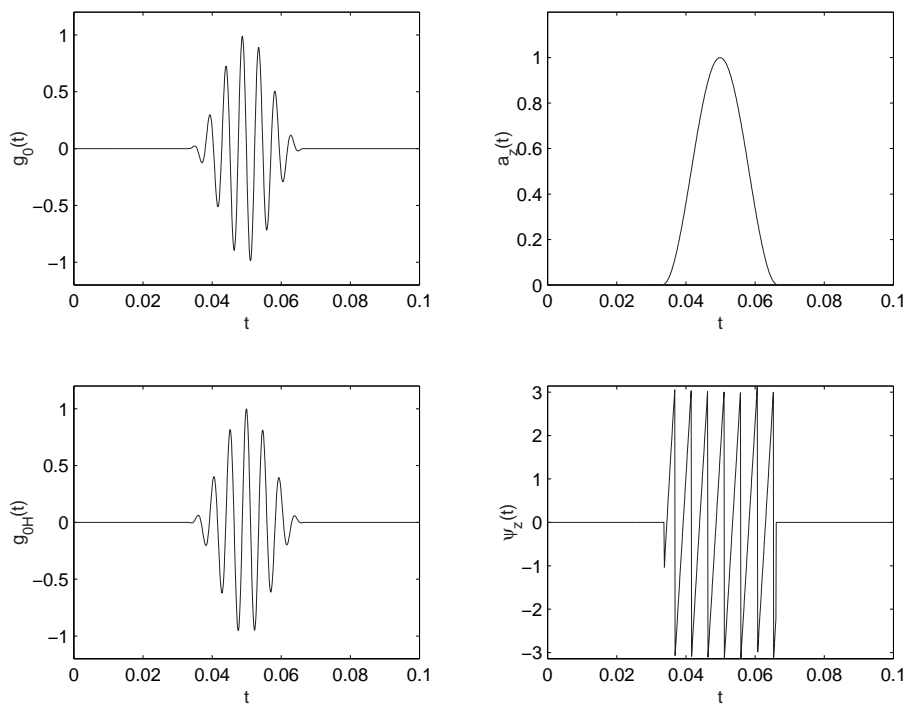
Begreberne øjeblikksamplitude og øjeblikksfrekvens kan formelt overføres til det almindelige tilfælde, hvor det analytiske signal $z(t)$ er givet på formen $a_z(t) \exp(j\psi_z(t))$. På figur 3.6 ses et eksempel, hvor $\psi_z(t)$ har en ikke-lineær variation med tiden.

Også ved ikke-analytiske signaler finder disse begreber anvendelse, ligesom det er muligt at definere tilsvarende størrelser for digitale signaler (jf. kap. 3.2.2). Da

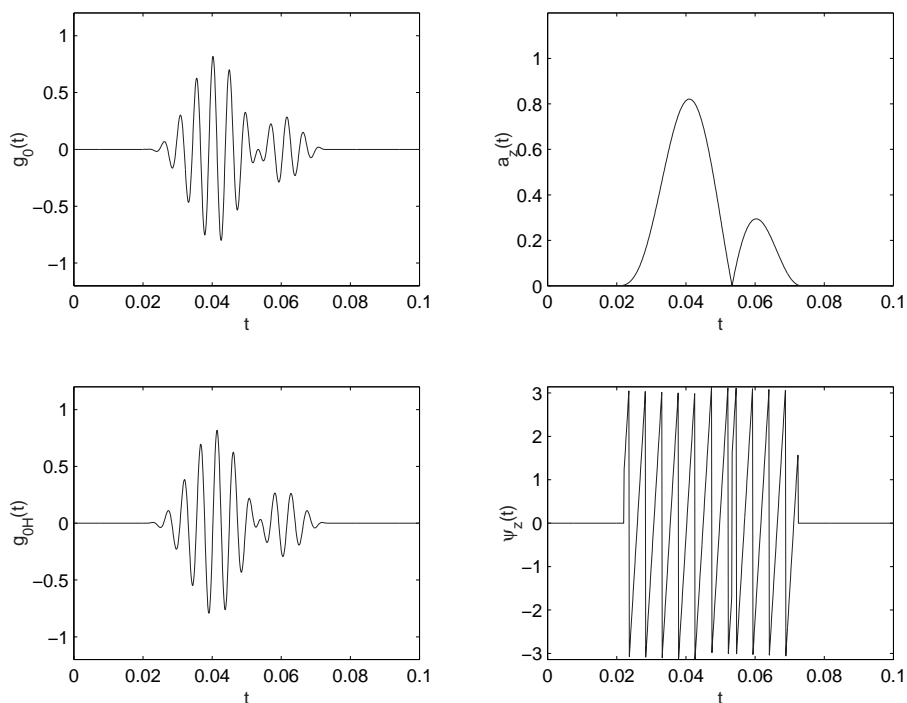
$$\psi(t) = \arctan \frac{g_H(t)}{g(t)} \quad (3.59)$$

fås det ved differentiation, at øjeblikksfrekvensen også kan udtrykkes på formen

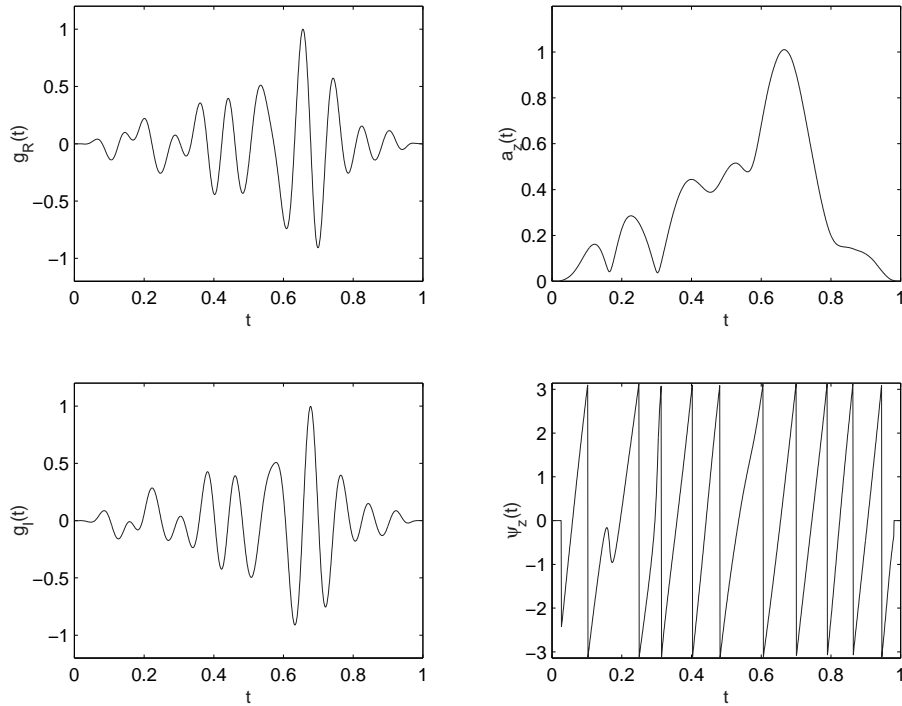
$$\frac{\psi'(t)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{g(t)g'_H(t) - g_H(t)g'(t)}{g^2(t) + g_H^2(t)}. \quad (3.60)$$



Figur 3.4: Øjeblikksamplitude og -fase for analytisk signal.



Figur 3.5: Øjeblikksamplitude og -fase for analytisk signal med diskontinuitetpunkt.



Figur 3.6: Øjeblikksamplitude og -fase for analytisk signal med ikke-lineær variation for $\psi_z(t)$.

3.3.1 Lineært FM-signal

Det komplekse signal $\exp(j\pi r t^2)$, hvor r er en konstant, har visse interessante egenskaber. Af udtrykket for signalet ses det straks, at amplitudedelen af signalet er 1, og at signalets fase del er givet ved

$$\psi(t) = \pi r t^2. \quad (3.61)$$

På figur 3.7 ses signalet afbildet. Signalets spektrum findes formelt af

$$G_{FM}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\pi r t^2} e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j\pi f^2/r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\pi r(t-f/r)t^2} dt = \sqrt{\frac{j}{r}} e^{-j\pi f^2/r}. \quad (3.62)$$

Signalets amplitudespektrum er altså konstant (uafhængig af frekvensen), og dets fasespektrum varierer kvadratisk med frekvensen. Bemærk ligheden mellem signal og spektrum.

Signalets øjeblikksfrekvens f_i kan findes til⁴

$$f_i = \psi'(t)/2\pi = r t. \quad (3.63)$$

f_i vokser altså lineært med tiden, således som man også kan se på figur 3.7, og dette er grunden til, at signalet betegnes et lineært frekvensmoduleret signal.

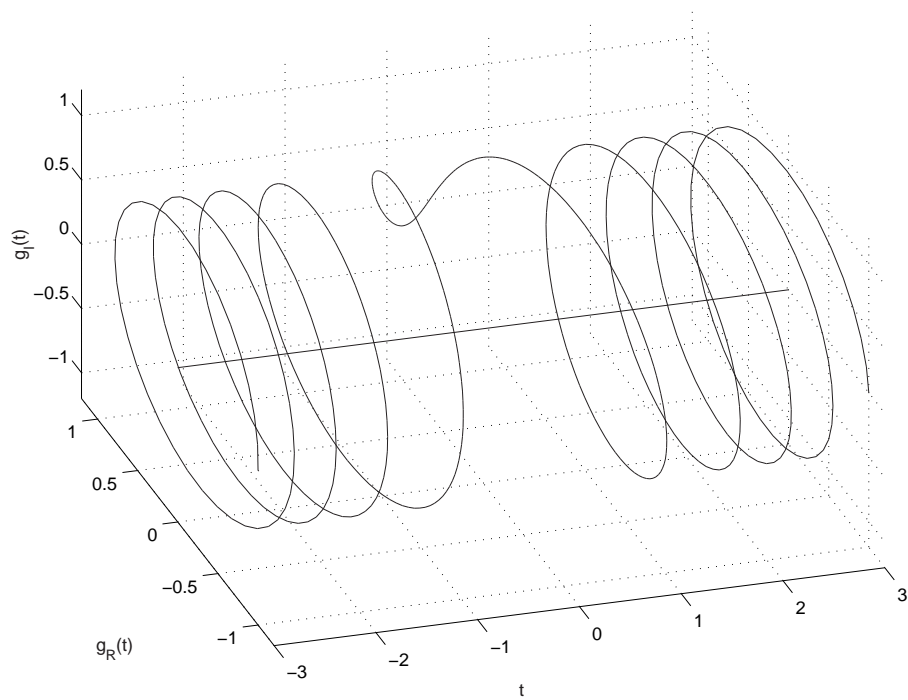
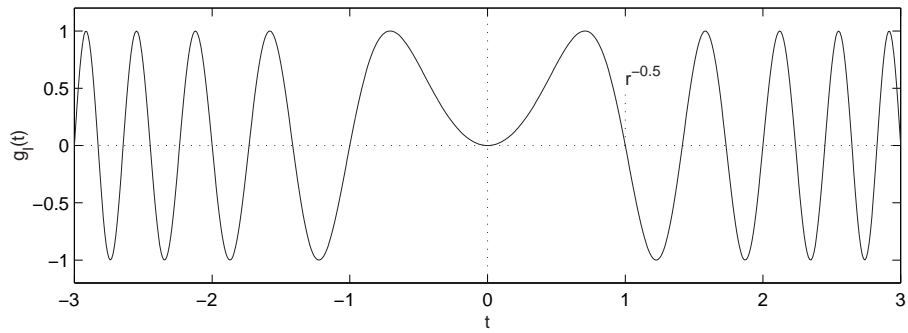
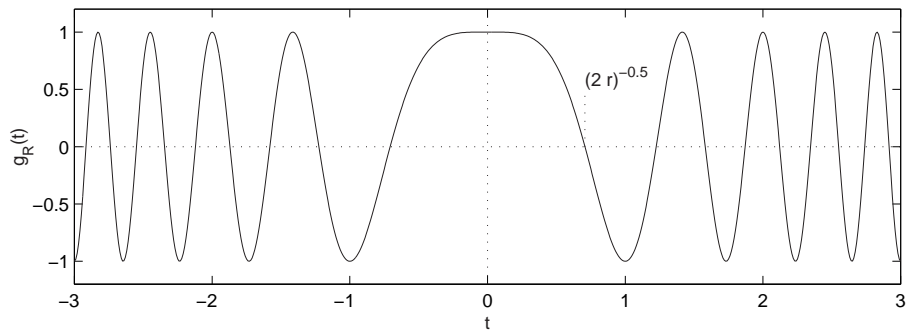
Det ses umiddelbart, at dette signal ikke tilhører mængden af signaler med endelig energi. Det gør derimod signalet

$$g(t) = a(t) \exp(j\pi r t^2), \quad (3.64)$$

hvor $a(t)$ er et passende valgt reelt signal. Dette signals spektrum $G(f)$ kan fås af udtrykket

$$G(f) = e^{-j\pi f^2/r} \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{j\pi r(f/r-t)^2} dt. \quad (3.65)$$

⁴Heraf ses det, at konstanten r angiver, hvor hurtigt frekvensen af signalet ændrer sig med tiden (f.eks. i Hz/sek).



Figur 3.7: Komplex FM-signal $g_{FM}(t) = \exp(j\pi r t^2)$.

Formen af $|G(f)|$ er altså bestemt af en foldning af de to funktioner $a(f)$ og $\exp(j\pi r f^2)$. Medens resultatet af denne foldning ikke altid lader sig direkte beregne, kan man for ”meget store” værdier af parameteren r benytte sig af følgende bekvemme tilnærmelse.

Om signalet

$$\Delta_p(t) = \sqrt{\frac{p}{j}} \exp(j\pi p t^2) \quad (3.66)$$

gælder det, at $\Delta_p(t) \rightarrow \delta(t)$, når $p \rightarrow \infty$. Følgelig vil man for store værdier af produktet rT , hvor T er ”varigheden” af $a(t)$, have, at

$$G(f) \approx a\left(\frac{f}{r}\right) \cdot \sqrt{\frac{j}{r}} \cdot e^{-j\pi f^2/r} \quad (3.67)$$

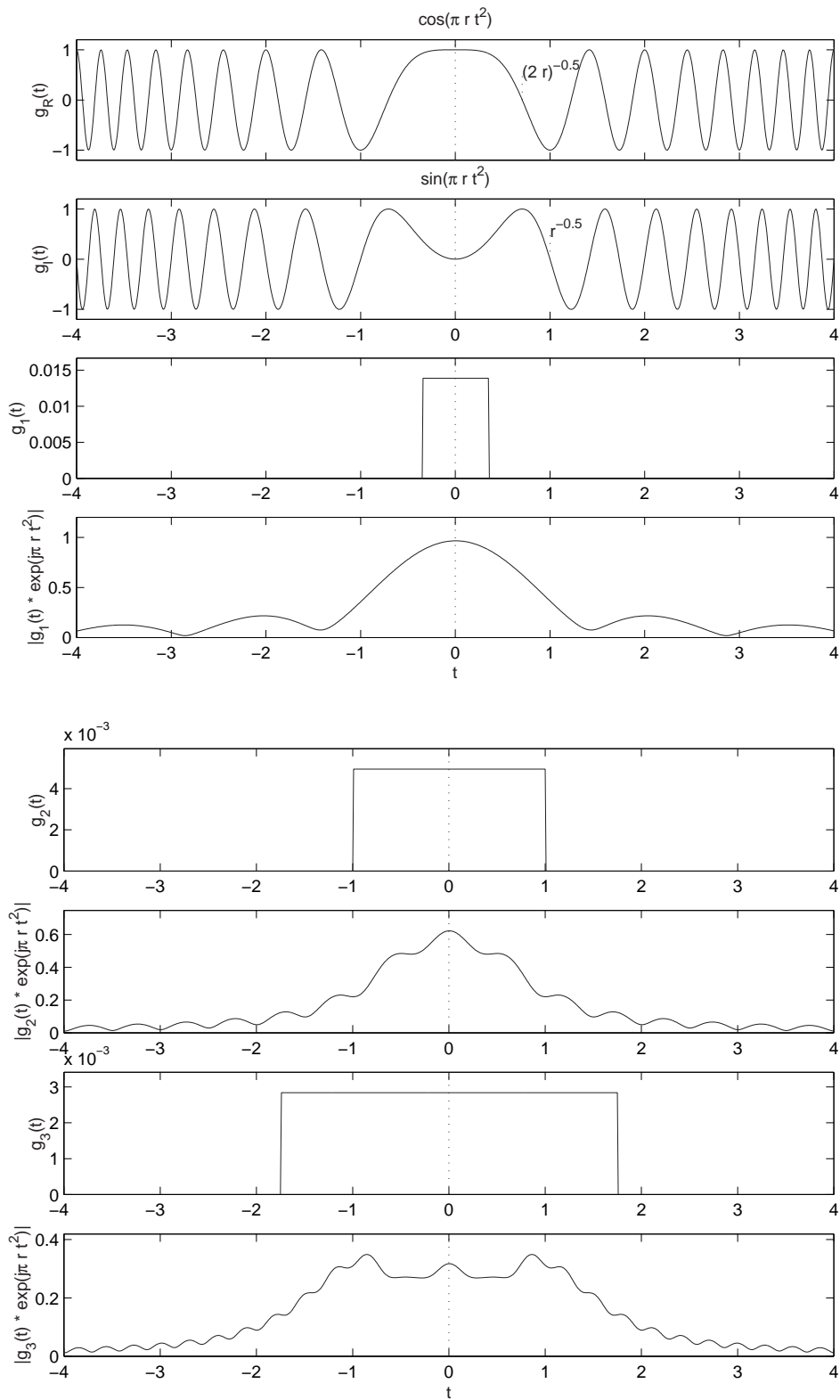
såfremt $a(f)$ er kontinuert. $|G(f)|$ har under disse betingelser omtrent samme form som $|a(t)|$ (dog passende skaleret).

Af fouriertransformationsparret

$$a(t) * \exp(j\pi r t^2) \leftrightarrow G_a(f) \cdot \sqrt{\frac{j}{r}} \exp(-j\pi f^2/r), \quad (3.68)$$

hvor $a(t) \leftrightarrow G_a(f)$, kan man med lignende betragtninger som ovenfor samt ved anvendelse af symmetrireglen få, at signalet $a(t) * \exp(j\pi r t^2)$ vil have en indhyllingskurve af formen $|G_a(f)|$ passende skaleret og forskudt, når produktet rT er lille. Figur 3.8 ses eksempler på foldningsresultater for et firkantsignal, hvis varighed ændres.

Bemærk, at man, såfremt $a(t)$ er tidsbegrænset, d.v.s. starter til $t = t_1$ og slutter til $t = t_2$, får et FM-signal med ”startfrekvensen” rt_1 og ”slutfrekvensen” rt_2 . Dette kan naturligvis også opnås ved passende anvendelse af reglen om forskydning af frekvensaksens nulpunkt.



Figur 3.8: Midlet komplekst FM-signal.

Anvendelse af den diskrete fouriertransformation

En meget anvendt beregningsprocedure inden for digital signalbehandling er den diskrete fouriertransformation (i det følgende forkortet til DFT), som kan udtrykkes på formen

$$\begin{aligned} G(m) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-jm \frac{2\pi}{N} n} \\ g(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} G(m) e^{jm \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Set fra et signalanalytisk synspunkt giver disse formler sammenhængen mellem et periodisk digitalt signal $g(n)$ (med perioden N) og dets spektrum $G(m)$, jvf. afsnit 2.8. Hermed kan man altså umiddelbart beregne spektret for sådanne signaler eller signalet hørende til et forelagt spektrum.

Imidlertid gør formen af disse udtryk dem så velegnede til numeriske beregninger - her er ingen uendelige grænser, intergraler eller lignende -, at de også finder anvendelse til andre opgavetyper, f.eks. spektralanalyse og filtrering af alle former for analoge og digitale signaler foruden numerisk løsning af differens- og differentialligninger m.m. Relationerne og deres anvendelse vil derfor blive studeret nøjere i dette kapitel.

4.1 Relation til andre fouriertransformationer

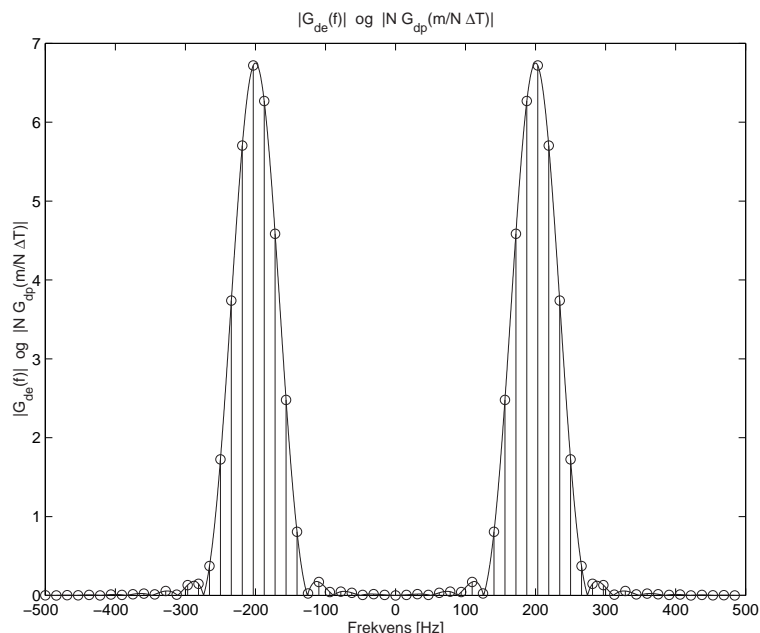
I kapitel 2 er gennemgået relationerne mellem de forskellige fouriertransformationer for analoge og digitale signaler. Heraf ses, at det under passende forudsætninger er muligt at benytte en DFT til beregning af spektret for de forskellige signaltyper. Dette er af stor praktisk betydning, da det stort set altid er DFT'en eller dermed beslægtede teknikker (se afsnit 4.2 om den hurtige fouriertransformation), som er implementeret i signalbehandlingsprogrammet¹.

For et digitalt signal $g_{de}(n)$ med endelig energi og en varighed på N samples er relationen til den DFT $G_{dp}(m)$ for det tilsvarende periodiske signal med perioden N givet ved

$$G_{de}\left(\frac{m}{N\Delta T}\right) = NG_{dp}(m) \quad (4.2)$$

Dette svarer til at g_{de} er gentaget med en periode på N samples. Det kan således ses, at $G_{dp}(m)$ er en samplet version af $G_{de}(f)$ for frekvenserne $f = m/(N\Delta T)$ som vist på figur 4.1. De mellemliggende

¹I appendix H er gennemgået programmet Malab og dets implementering af DFT'en i afsnit H.6



Figur 4.1: Spektrum for digitalt signal med endelig energi og de tilsvarende værdier fra den diskrete fouriertransformation.

værdier i spektret kan så vises approksimativet ved at lave linier mellem de samlede værdier. For få spektralværdier (lille N) giver det en ukorrekt gengivelse af spektret for mellemliggende værdier, og oftest øges N for at en korrekt præsentation af spektret². Forøgelsen af N gøres ved at tilføje et antal samples med værdien nul til signalet (zero padding på engelsk). Herved øges den tilsyneladende periodetiden og antallet af beregnede værdier, og en mere korrekt præsentation af $G_{de}(f)$ opnås. Et eksempel er vist på figur 4.2.

Den diskrete fouriertransformation kan således benyttes for begge typer digitale signaler, og kan også benyttes på passende samlede analoge signaler. For at der skal være ækvivalens mellem spektrene kræves her, at det analoge signal er båndbegrænset og samplet således at $G_{ae}(f) \equiv 0$ for $|f| \geq f_s/2$, hvor $G_{ae}(f)$ er det analoge signals spektrum. Fra afsnit 2.6 have at

$$G_{de}(f) = \frac{1}{\Delta T} G_{ae}(f) = f_s G_{ae}(f), \quad \text{for } |f| \leq f_s/2 \quad (4.3)$$

hvor $g_{de}(t)$ er det ækvivalente digitale signal. Under disse forudsætninger fås relationen til den DFT

$$G_{ae}\left(\frac{m}{N\Delta T}\right) = \frac{1}{f_s} N G_{dp}(m) \quad (4.4)$$

For et periodisk analogt signal have

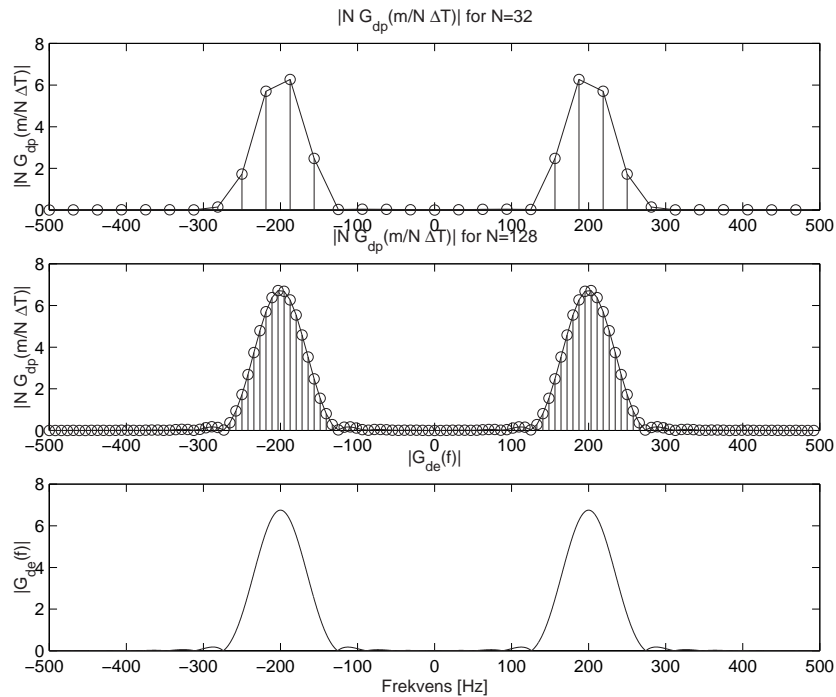
$$G_{ap}(m) = \frac{1}{T} G_{ae}\left(\frac{m}{T}\right) \quad (4.5)$$

Antages det at $T = N\Delta T$ og $G_{ap}(m) \equiv 0$ for $|\frac{m}{T}| \geq f_s/2$ fås

$$G_{ap}(m) = \frac{1}{N\Delta T} N \frac{1}{f_s} G_{dp}(m) = G_{dp}(m) \quad (4.6)$$

Resultatet fra den DFT kan således direkte benyttes.

²Forøgelsen af N skal naturligvis ikke forveksles med at signalet $g_{de}(n)$ har N diskrete spektrale komponenter. Spektret vi til alle tider være stykvis kontinuert med en frekvensakse f med definitionsmængden de reelle tal.



Figur 4.2: Effekten af forøgelsen af N i beregningen af spektret.

4.2 Den hurtige fouriertransformation

Når man skal udnytte udtrykkene ovenfor til praktiske beregninger, støder man - trods deres skikkelige form - på problemer, idet der i hvert udtryk indgår N^2 komplekse multiplikationer og lige så mange komplekse additioner.

Er N stor, betyder det, at den støj, som er en følge af de numeriske operationer, let bliver meget betragtelig, ligesom den tid, beregningerne tager, hurtigt bliver helt uacceptabelt lang. Selv om de numeriske problemer kan løses ved anvendelse af et stort antal bit i talrepræsentationen, betyder mange bit også, at beregningstiden har tendens til at vokse.

På grund af eksponentialfunktionens periodicitet er det imidlertid muligt at organisere beregningerne på en sådan måde, at antallet af komplekse multiplikationer og additioner kan reduceres betragteligt. Dette gøres ved at omskrive den diskrete fouriertransformation til en række transformationer på dele af signalet. Den diskrete fouriertransformation kan skrives som

$$\begin{aligned}
 G(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} g(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)[e^{-j\frac{2\pi}{N}}]^{mn} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} g(n)W_N^{mn}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Beregningen opdeles nu i to transformationer; en på signalets samples med lige index og en med ulige index:

$$\begin{aligned}
 G(m) &= \sum_{r=0}^{N/2-1} g(2r)W_N^{m2r} + \sum_{r=0}^{N/2-1} g(2r+1)W_N^{m(2r+1)} \\
 &= \sum_{r=0}^{N/2-1} g(2r)(W_N^2)^{mr} + W_N^m \sum_{r=0}^{N/2-1} g(2r+1)(W_N^2)^{mr}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Bemærk her at

$$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}2} = W_{N/2} \quad (4.9)$$

og hermed fås

$$\begin{aligned} G(m) &= \sum_{r=0}^{N/2-1} g(2r)W_{N/2}^{mr} + W_N^m \sum_{r=0}^{N/2-1} g(2r+1)W_{N/2}^{mr} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} g_{\text{lige}}(r)W_{N/2}^{mr} + W_N^m \sum_{r=0}^{N/2-1} g_{\text{ulige}}(r)W_{N/2}^{mr} \\ &= G_{\text{lige}}(m) + W_N^m G_{\text{ulige}}(m), \end{aligned} \quad (4.10)$$

hvor $g_{\text{lige}}(r) \xleftrightarrow{N/2} G_{\text{lige}}(m)$ er fouriertransformationen af signalets samples med lige index og $g_{\text{ulige}}(r) \xleftrightarrow{N/2} G_{\text{ulige}}(m)$ med ulige index. I disse to transformationer benyttes faktorerne $W_{N/2}^{mr}$, som er periodisk med perioden $N/2$, hvilket også er lig antallet af samples i de to delsignaler. Den oprindelige transformation med N samples er herved blevet opdelt i to transformationer indeholdende $N/2$ samples, og (4.10) angiver, hvordan de to mindre transformationer skal kombineres for at opnå den endelige diskrete foruriertransformation. For at lave beregningen i (4.10) skal der udføres N komplekse multiplikationer og additioner.

Hvis det nu antages at $N = 2^p$, hvor p er et heltal, kan hver af de to $N/2$ samples transformationer opdeles igen, således at

$$\begin{aligned} G_{\text{lige}}(m) &= \sum_{r=0}^{N/4-1} g_{\text{lige}}(2r)W_{N/2}^{m2r} + \sum_{r=0}^{N/4-1} g_{\text{lige}}(2r+1)W_{N/2}^{m(2r+1)} \\ &= \sum_{r=0}^{N/4-1} g_{\text{lige}}(2r)(W_{N/2}^2)^{mr} + W_{N/2}^m \sum_{r=0}^{N/4-1} g_{\text{lige}}(2r+1)(W_{N/2}^2)^{mr} \quad (4.11) \\ &= \sum_{r=0}^{N/4-1} g_{\text{lige}}(2r)W_{N/4}^{mr} + W_{N/2}^m \sum_{r=0}^{N/4-1} g_{\text{lige}}(2r+1)W_{N/4}^{mr} \end{aligned}$$

og på lignende måde for $G_{\text{ulige}}(m)$. En sådan opdeling kan med $N = 2^p$ fortsættes indtil der kun indgår en sample i de enkelte summer. Der vil være $p = \log_2 N$ trin i en sådan opdeling. I hver af trinnen skal der udføres N komplekse multiplikationer og additioner, og den totale beregningsmængde bliver derfor $N \log_2 N$ komplekse multiplikationer og additioner. Dette skal sammenlignes med N^2 beregninger for en direkte DFT, og besparelsen ved den hurtige beregningsmetode er

$$\frac{N^2}{N \log_2(N)} = \frac{N}{\log_2(N)}. \quad (4.12)$$

For $N = 4096 = 2^{12}$ er besparelsen på en faktor 341 gange, hvilket er ganske betydeligt. Den hurtige fouriertransformation (FFT - Fast Fourier Transformation) har derfor vundet stor udbredelse og anvendes i alle kommercielle programmer til signalbehandling ³.

Der findes en lang række forskellige metoder til at udføre hurtig foruriertransformation, og disse omtales f.eks. af Oppenheimer & Schafer (1989). Der findes algoritmer for alle de primiske faktorer (2, 3, 5, etc.), og f.eks. Matlab benytter en opsplnitning i primiske faktorer, så ikke kun signaler af længden $N = 2^P$ kan transformeres hurtigt.

FFT benyttes også ofte til at udføre foldning med, da en transformation af de to signaler, multiplikation og invers transformation ofte for lange signaler er hurtigere end en direkte implementering af foldningen.

³Metoden er "genopdaget" af J.W. Cooley og J.W. Tukey (An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, Math. of Comp., vol. 19, pp. 297-391). Det menes, at bl.a. Gauss også kendte til denne beregningsmetode.

4.3 DFT som komplekst digitalt filter

Udtrykket i ligning (4.1) lader sig på enkel vis omforme således, at man kan betragte det at udføre en DFT på et signal som resultatet af en digital filtrering af signalet med en samling filtre - en filterbank -, som tilsammen dækker frekvensområdet $(-f_g, f_g)$.

En sådan betragtningsmåde kan være en hjælp ved fortolkningen af de resultater, der fremkommer, når den DFT benyttes på stokastiske signaler samt på periodiske signaler, hvis periodetid er ukendt.

Omformningen af det sædvanlige udtryk for en DFT

$$G(m) = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} g(q) e^{-jm \frac{2\pi}{N} q} \quad (4.13)$$

lettes, dersom man først antager, at m er konstant. Benyttes nu, at

$$e^{jm \frac{2\pi}{N} N} = 1 \quad (4.14)$$

kan udtrykket for $G(m)$ skrives på formen

$$G(m) = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} g(q) e^{jm \frac{2\pi}{N} (N-q)} \quad (4.15)$$

Sammenlignes denne ligning med ligningen

$$y_m(n) = \sum_{q=n-N}^{n-1} g(q) \frac{1}{N} e^{jm \frac{2\pi}{N} (n-q)} \quad (4.16)$$

ses det umiddelbart, at $y_m(N) = G(m)$. Da udtrykket for $Y_m(n)$ lader sig fortolke som en foldning mellem signalet $g(n)$ og impulssvaret

$$h_m(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} e^{jm \frac{2\pi}{N} n} & \text{for } n=1, 2, \dots, N \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (4.17)$$

kan spektrets værdi $G(m)$ for fastholdt m altså opfattes som værdien af udgangssignalet fra dette filter til tidspunktet $n = N$. (Det kan forekomme lidt besynderligt, at impulssvaret først begynder til $n = 1$, men forklaringen er, at de følgende regninger derved forenkles.) Figur 4.3 viser impulssvaret for $N = 64$.

Det bemærkes, at filtret er af F.I.R.-typen med varigheden N , og at $h_m(n)$ er kompleks. Den sidste kendsgerning komplicerer betragtningerne, men opfylder til gengæld den almindelige forventning om, at $G(m)$ normalt er kompleks.

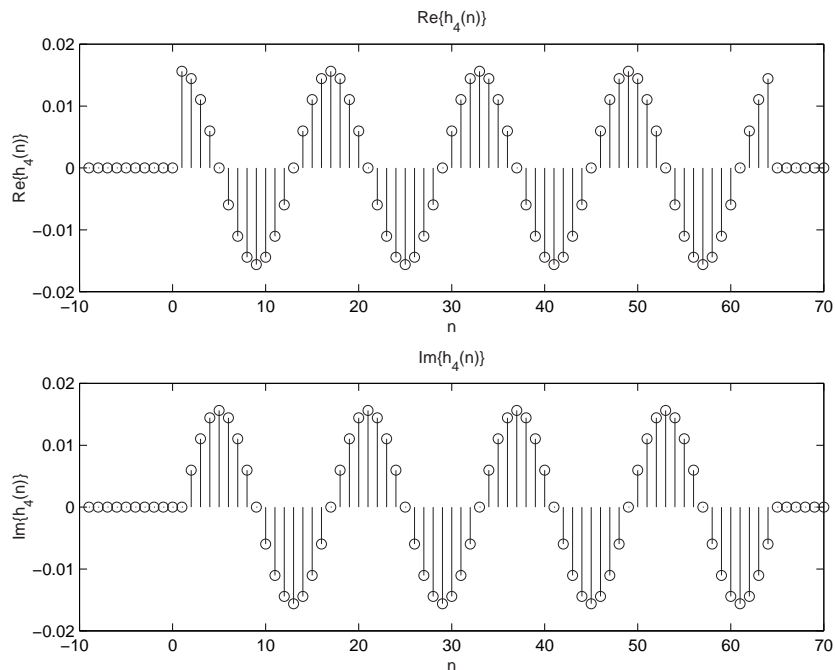
Som det ses af formlen for den DFT, beregner man altså med dette udtryk udgangssignalet til tiden $n = N$ på i alt N filtre med de anførte impulssvar, idet frekvensparameteren m f.eks. varierer i området $(0, N - 1)$.

Overføringsfunktionen for de enkelte filtre findes enklest, dersom man først betragter det filter, hvor $m = 0$. For dette filter gælder det, at

$$h_0(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{for } n=1, 2, \dots, N \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (4.18)$$

$h_0(n)$ er således den digitale integrator tidsforskudt tidsrummet ΔT . Overføringsfunktionen $H_0(f)$ for dette filter kan da straks skrives på formen

$$H_0(f) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi f N \Delta T)}{\sin(\pi f \Delta T)} e^{-j\pi f (N+1) \Delta T} \quad (4.19)$$



Figur 4.3: Impulssvar for $h_m(n)$ for $N = 64$ og $m = 4$.

(se f.eks. afsnit 2.7.2).

Da $2\Delta T f_g = 1$, er

$$e^{jm\frac{2\pi}{N}n} = e^{j2\pi m\frac{2f_g}{N}n\Delta T} \quad (4.20)$$

og følgelig vil man have, at

$$h_m(n) = h_0(n)e^{j2\pi m\frac{2f_g}{N}n\Delta T} \quad (4.21)$$

Herved bliver

$$H_m(f) = H_0\left(f - m\frac{2f_g}{N}\right) \quad (4.22)$$

Alle filtre får altså samme form som $H_0(f)$, men er forskudt størrelsen $m2f_g/N$ på frekvensaksen (se figur 4.4). Bemærk, at hvor et givet filters $|H_m(f)|$ har maksimum, har alle andre filtre et nulpunkt. En følge af, at $h(n)$ er kompleks, er, at $H_m(f)$ ikke har den sædvanlige symmetri omkring $f = 0$.

4.4 Samtidig DFT af to reelle signaler

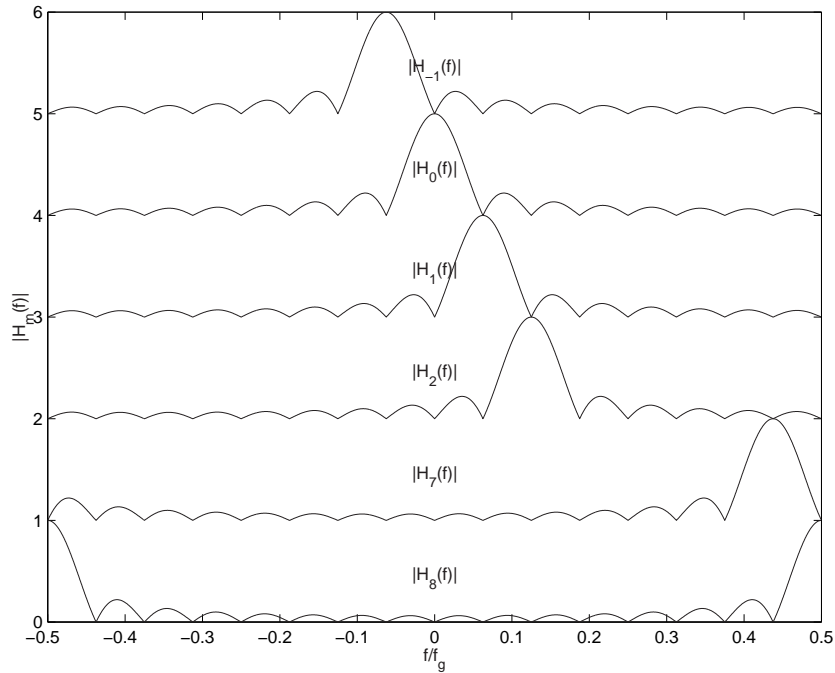
En foldning kan implementeres direkte eller via fouriertransformation, hvor de komplekse spektre for de to signaler ganges sammen, og det resulterende signal findes v.h.j.a. den inverse fouriertransformation. Denne metode kan være mere effektiv end en direkte implementering, hvis der benyttes FFT, og signalerne har en passende længde (typisk $N > 64$ eller 128). Hvis de to signaler yderligere er reelle, kan deres fouriertransformation udføres ved hjælp af én transformation som beskrevet i det følgende. Dette vil næsten kunne reducere beregningstiden med en faktor 2.

Lader man $g(n)$ og $h(n)$ være to reelle signaler, hvor

$$g(n) \xleftrightarrow{N} G(m) \quad \text{og} \quad h(n) \xleftrightarrow{N} H(m) \quad (4.23)$$

vil det som sædvanligt gælde, at

$$G^*(m) = G(N - m) \quad \text{og} \quad H^*(m) = H(N - m) \quad (4.24)$$



Figur 4.4: Amplitudekarakteristikker for DFT-filtre. $N = 16$.

DFT på det komplekse signal

$$g(n) + j h(n) = c(n) \xleftrightarrow{N} C(m) = G(m) + j H(m) \quad (4.25)$$

hvis spektrum $C(m)$ ikke opfylder den ovenfor nævnte betingelse, kan nu ved hjælp af simple regninger benyttes til at finde $G(m)$ og $H(m)$. Med de anførte betegnelser vil

$$C(N - m) = G(N - m) + j H(N - m) \quad (4.26)$$

og dermed er

$$C^*(N - m) = G(m) - j H(m) \quad (4.27)$$

Derfor vil

$$\begin{aligned} G(m) &= \frac{1}{2}(C(m) + C^*(N - m)) \\ H(m) &= -j \frac{1}{2}(C(m) - C^*(N - m)) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Disse ligninger kan også skrives på formen

$$\begin{aligned} \text{Re}(G(m)) &= \frac{1}{2} [\text{Re}\{C(m)\} + \text{Re}\{C(N - m)\}] \\ \text{Im}(G(m)) &= \frac{1}{2} [\text{Im}\{C(m)\} - \text{Im}\{C(N - m)\}] \end{aligned} \quad (4.29)$$

og

$$\begin{aligned} \text{Re}(H(m)) &= \frac{1}{2} [\text{Im}\{C(m)\} + \text{Im}\{C(N - m)\}] \\ \text{Im}(H(m)) &= -\frac{1}{2} [\text{Re}\{C(m)\} - \text{Re}\{C(N - m)\}] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Det er altså således muligt at få beregnet den DFT af to reelle signaler på een gang. Da de praktiske beregninger af en DFT giver anledning til en vis støj i de beregnede resultater, må man forvente, at en del af denne støj kan karakteriseres som "krydstale" mellem de to signaler, dvs. at de beregnede spektre vil være lidt påvirkede af hinanden.

4.5 DFT af et reelt digitalt signal af længden $2N$

Hvis der blot skal laves en DFT og signalet er reelt, kan antallet af beregninger reduceres ved at benytte fouriertransformation af et komplekst signal dannet ud fra det reelle signal.

Det antages her, at $g(n)$ er et reelt signal af længden $2N$, dvs. at

$$g(n) \stackrel{2N}{\leftrightarrow} G(m) \quad (4.31)$$

$G(m)$, som jo altså består af $2N$ komplekse værdier, kan da beregnes ved hjælp af en DFT på et komplekst signal $c(n)$ på N værdier

$$c(n) \stackrel{N}{\leftrightarrow} C(m) \quad (4.32)$$

Udtrykket for $G(m)$ opdeles nu således, at

$$\begin{aligned} G(m) &= \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{2N-1} g(n) e^{-jm \frac{2\pi}{2N} n} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} g(2p) e^{-jm \frac{2\pi}{2N} 2p} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} g(2q+1) e^{-jm \frac{2\pi}{2N} (2q+1)} \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Heraf ses det, at er $g_0(p) = g(2p)$, og $g_1(q) = g(2q+1)$, og er

$$g_0(p) \stackrel{N}{\leftrightarrow} G_0(m) \quad \text{og} \quad g_1(q) \stackrel{N}{\leftrightarrow} G_1(m) \quad (4.34)$$

vil

$$G(m) = \frac{1}{2} \left(G_0(m) + G_1(m) e^{-jm \frac{2\pi}{2N}} \right) \quad (4.35)$$

Signalet $g(n)$ deles derfor op i to nævnte reelle delsignaler $g_0(n)$ bestående af de N værdier af $g(n)$ med lige tidsparameter og $g_1(n)$ bestående af resten af $g(n)$ værdierne. Man sætter dernæst

$$c(n) = g_0(n) + j g_1(n) \quad (4.36)$$

og benytter resultatet fra afsnit 4.4 således, at

$$G(m) = \frac{1}{4} \left(C(m) + C^*(N-m) - j(C(m) - C^*(N-m)) e^{-jm \frac{2\pi}{2N}} \right) \quad (4.37)$$

Det erindres, at $C(m)$ har perioden N , samt at man jo kun behøver at kende de første N værdier af $G(m)$, eftersom

$$G(2N-m) = G^*(m) \quad (4.38)$$

4.6 Omvendt DFT af spektret for et digitalt signal af længden $2N$

Er $G(m)$ spektret for et reelt digitalt signal $g(n)$ af længden $2N$ kendt, kan man beregne $g(n)$ på følgende måde. Af afsnit 4.5 fås

$$G(m) = \frac{1}{2} \left(G_0(m) + G_1(m) e^{-jm \frac{2\pi}{2N}} \right) \quad (4.39)$$

hvor de reelle signaler $g_0(n)$ og $g_1(n)$ hver er af længden N . Det vil nu gælde, at

$$G^*(N-m) = \frac{1}{2} \left(G_0(m) + G_1(m) e^{j(N-m) \frac{2\pi}{2N}} \right) \quad (4.40)$$

Simple regninger vil da sammen med

$$C(m) = G_0(m) + j G_1(m) \quad (4.41)$$

føre til udtrykket

$$C(m) = G(m) + G^*(N - m) + j(G(m) - G^*(N - m))e^{jm\frac{2\pi}{2N}} \quad (4.42)$$

som med en omvendt DFT giver

$$c(n) = g_0(n) + j g_1(n) \quad (4.43)$$

Man danner derpå det ønskede signal af

$$g(n) = \begin{cases} g_0(n/2) & \text{for } n \text{ lige} \\ g_1((n-1)/2) & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases} \quad (4.44)$$

Stokastiske signaler

Begrebet stokastisk signal¹ benyttes primært om signaler, der har et "naturligt" stokastisk ophav. Som et eksempel herpå kan nævnes den termiske støj, som skyldes tilfældige elektronbevægelser i en elektrisk leder. Herudover benyttes begrebet undertiden på signaler af andre kategorier (f.eks. periodiske signaler), såfremt en eller flere signalparametre kan gives passende stokastisk "fortolkning".

Et stokastisk signals tidsforløb kan normalt kun forudsiges i middel. Beskrivelsen af sådanne signaler baseres derfor i reglen på begreber hentet fra sandsynlighedsregningen. På grund af signalets tidsparameter bliver denne beskrivelse imidlertid hurtigt uoverskuelig og upraktisk at arbejde med. Det er derfor kun den delmængde af de stokastiske signaler, der går under betegnelsen ergodiske², som kan behandles rimeligt simpelt. Blandt de signaler, som herved udelukkes, er bl.a. de ikke-stationære, en gruppe som må siges at spille en væsentlig rolle i praksis.

Medens spektralbegrebet for almindelige - deterministiske - signaler er direkte knyttet til signalet, defineres et stokastisk signals spektrum indirekte via signalets korrelationsfunktion. Dette er en "naturlig" følge af den "usikkerhed", som kendetegner tidsforløbet for det stokastiske signal.

Stokastiske signaler kan være både analoge og digitale. I denne forbindelse bør det erindres, at et digitalt signals værdier skal kunne beskrives med et endeligt antal cifre. Dette forhold medfører bl.a., at de benyttede stokastiske begreber (som f.eks. fordelingsfunktion) bliver forskellige for de to signalkategorier. Som det var tilfældet med sædvanlige digitale signaler, vil det imidlertid i det følgende ofte være antaget, at den præcision, hvormed de digitale signalers værdier beskrives, er uhyre stor, og at man dermed til en vis grad kan anvende den samme beskrivelsesmåde for begge typer signaler.

Selv om hovedparten af de signaler, som behandles, vil være reelle, er det ikke hermed udelukket, at stokastiske signaler godt kan være komplekse. Analysen af komplekse stokastiske signaler foretages, med ganske få ændringer, som for de reelle stokastiske signaler.

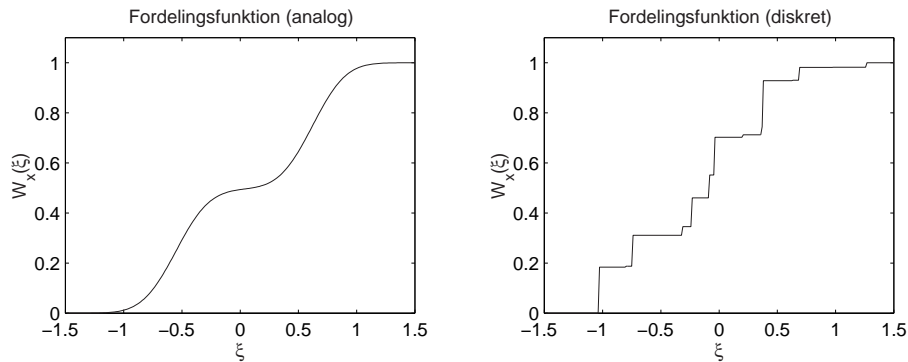
5.1 Terminologi og grundbegreber

I dette afsnit opstilles den terminologi og de symboler, der vil blive benyttet såvel i dette afsnit af signalanalysen som i de dele, der har tilknytning til beskrivelse og brug af stokastiske fænomener. Med hensyn til yderligere detaljer og beviser henvises til standardværker om sandsynlighed og statistik. Der bygges på den aksiomatiske definition af sandsynlighedsteorien, og begreber som eksperiment, hændelse, udfald, m.m. antages bekendte.

Sandsynligheder er tal, som knyttes til hændelser efter passende fastlagte fremgangsmåder. Sandsyn-

¹På engelsk benyttes betegnelsen: random signals.

²Se afsnit [5.2.2](#)



Figur 5.1: Eksempler på to forskellige fordelingsfunktioner.

ligheden for hændelsen A betegnes med

$$P(A) \quad (5.1)$$

og det gælder, at

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (5.2)$$

Såfremt der til et givet eksperiments mulige udfald knyttes tal - efter en eller anden vedtægt - er der hermed defineret en stokastisk variabel. Sådanne stokastiske variable betegnes i hovedsagen med store bogstaver f.eks. X, Y, Z . Værdimængden for de stokastiske variable, som finder anvendelse inden for signalanalysen, er enten de reelle tal (de fleste analoge signaler) eller en endelig delmængde af de rationale tal (digitale signaler)³.

Den endimensionale fordeling - eller fordelingsfunktionen - for en stokastisk variabel X betegnes med

$$W_X(\xi) \quad (5.3)$$

Den er en funktion af parameteren ξ , hvis definitionsområde er som anført ovenfor.

Idet

$$W_X(\xi_1) = P\{X \leq \xi_1\} \quad (5.4)$$

hvor ξ_1 er en fast værdi af ξ , ses det umiddelbart, at

$$0 \leq W_X(\xi) \leq 1 \quad (5.5)$$

og, at $W_X(\xi)$ er aldrig aftagende. Man har også, at

$$P\{\xi_1 < X \leq \xi_2\} = W_X(\xi_2) - W_X(\xi_1) \quad (5.6)$$

se eksemplerne på figur 5.1.

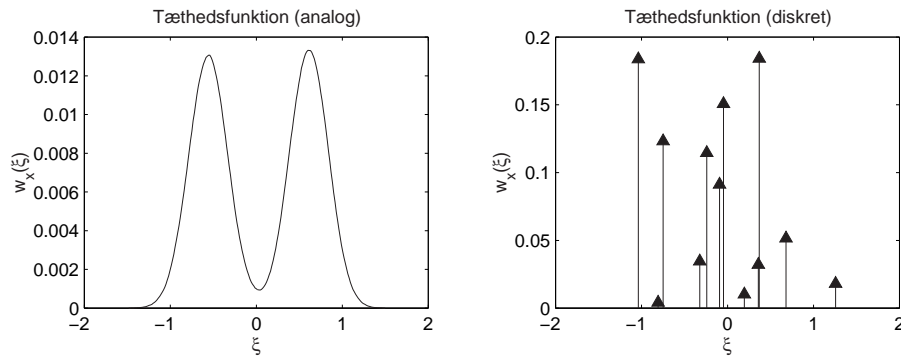
Den flerdimensionale fordelingsfunktion for flere stokastiske variable defineres på lignende vis som den endimensionale. For to stokastiske variable X og Y er således den todimensionale fordeling

$$W_{XY}(\xi_1, \eta_1) = P\{X \leq \xi_1, Y \leq \eta_1\} \quad (5.7)$$

Den endimensionale sandsynlighedstæthedsfunktion for den stokastiske variable X betegnes med

$$w_X(\xi) \quad (5.8)$$

³Er der i sidstnævnte tilfælde tale om, at det digitale signals værdier er beskrevet ved et meget stort antal cifre, tillader man sig af bekvemmelighed undertiden at benytte stokastiske variable, som har de reelle tal som værdimængde.



Figur 5.2: Eksempler på to forskellige sandsynlighedstæthedsfunktioner.

og den defineres ved

$$w_X(\xi) = \frac{dW(\xi)}{d\xi}, \quad W_X(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} w_X(\theta) d\theta \quad (5.9)$$

For de tilfælde, hvor ξ er defineret inden for en delmængde af de rationale tals område, består $w_X(\xi)$ udelukkende af δ -funktioner, idet $W_X(\xi)$ jo er trapepeformet. Er definitionsmængden for ξ de reelle tal, er $w_X(\xi)$ normalt kontinuert med undtagelse af de tilfælde, hvor $W_X(\xi)$ har knæk eller spring, se eksemplerne på figur 5.2.

Som bekendt er⁴

$$P\{\xi_1 < X \leq \xi_1 + d\xi_1\} = w_X(\xi_1)d\xi_1 \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} w_X(\xi)d\xi = 1 \quad . \quad (5.10)$$

Flerdimensionale sandsynlighedstæthedsfunktioner defineres på tilsvarende måde som endimensionale, f.eks. i to dimensioner som

$$w_{XZ}(a, b) = \frac{\partial^2 W_{XZ}(a, b)}{\partial a \partial b} \quad , \quad (5.11)$$

hvor X og Z er stokastiske variable.

I mange tilfælde indgår tiden som parameter i fordelinger og sandsynlighedstæthedsfunktioner. Hvor det er væsentligt i sammenhængen, vil dette blive angivet, f.eks. på formen

$$w_X(\xi; t) \quad . \quad (5.12)$$

Den forventede værdi - middelværdien - af en stokastisk variabel X er givet ved

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi w_X(\xi) d\xi \quad . \quad (5.13)$$

$E\{X\}$ benævnes også momentet af 1. Orden. Det n 'te moment bliver da⁵

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n w_X(\xi) d\xi \quad , \quad (5.14)$$

og det n 'te centrale moment er givet ved

$$E\{(X - E\{X\})^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - E\{X\})^n w_x(\xi) d\xi \quad . \quad (5.15)$$

⁴Dette udtryk kræver selvfølgelig speciel fortolkning, når $w_X(\xi)$ indeholder δ -funktioner.

⁵Overalt i det følgende antages det, at $E\{X^n\}$ eksisterer.

Det andet centrale moment benævnes også variansen

$$\sigma^2\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - E\{X\})^2 w_X(\xi) d\xi. \quad (5.16)$$

Er X og Y to stokastiske variable, vil

$$E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi\eta w_{XY}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (5.17)$$

Det centrale moment

$$E\{(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})\} \quad (5.18)$$

benævnes undertiden covariansen af X og Y .

Er k , q og a konstanter, følger umiddelbart, at

$$\begin{aligned} E\{kX\} &= kE\{X\} \quad \text{og} \quad E\{kX + qY\} = kE\{X\} + qE\{Y\} \\ E\{X + a\} &= E\{X\} + a \\ \sigma^2\{kX + a\} &= k^2\sigma^2\{X\}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Endvidere vil

$$\sigma^2\{X\} = E\{(X - E\{X\})^2\} = E\{X^2\} - E^2\{X\} \quad (5.20)$$

og kovariansen

$$E\{(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})\} = E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\}. \quad (5.21)$$

Er V kompleks, d.v.s. $V = X + jY$, er $E\{V\} = E\{X\} + jE\{Y\}$. Variansen af V er givet ved

$$\sigma_v^2 = E\{|V - E\{V\}|^2\}. \quad (5.22)$$

På tilsvarende vis har man for to komplekse stokastiske variable V og U , at kovariansen findes af

$$E\{(V - E\{V\})(U^* - E\{U^*\})\}. \quad (5.23)$$

5.1.1 Relationer mellem stokastiske variable

To stokastiske variable X og Y kaldes stokastisk uafhængige, såfremt

$$W_{XY}(\xi, \eta) = W_X(\xi)W_Y(\eta) \quad \text{eller} \quad w_{XY}(\xi, \eta) = w_X(\xi)w_Y(\eta). \quad (5.24)$$

Denne definition kan udvides til at gælde flere stokastiske variable.

Er blot

$$E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}, \quad (5.25)$$

siges X og Y at være ukorrelerede.

Såfremt

$$E\{XY\} = 0 \quad (5.26)$$

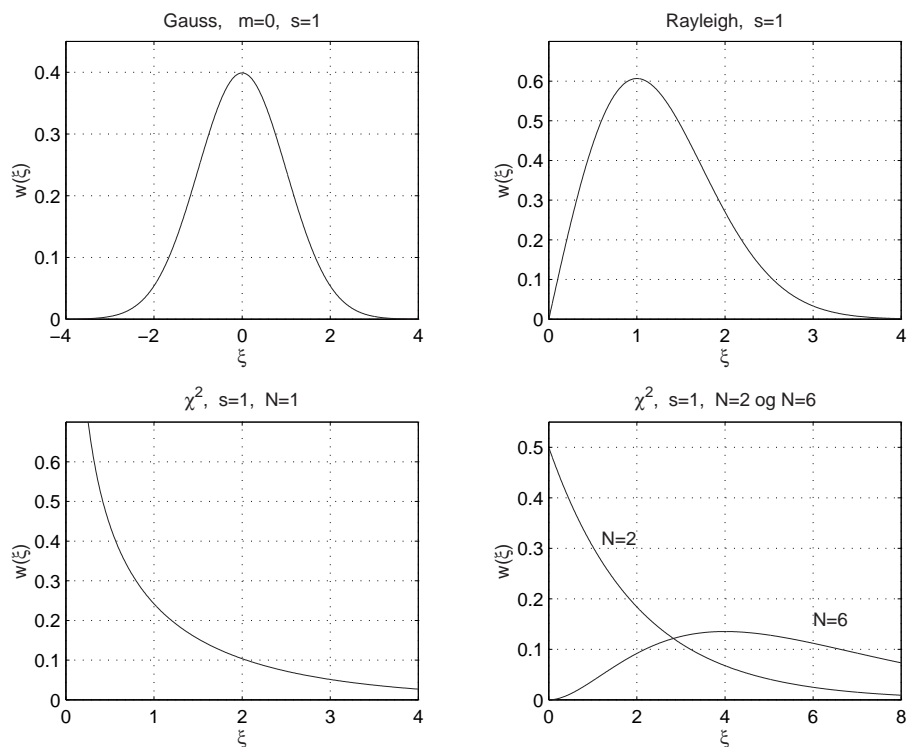
benyttes betegnelsen ortogonale om de to variable.

Det ses umiddelbart, at stokastisk uafhængige variable også er ukorrelerede. Det omvendte er derimod ikke nødvendigvis tilfældet.

Er de to variable X og Y simultant normalfordelte (se f.eks. tabel 5.1), vil det gælde, at såfremt X og Y er ukorrelerede, d.v.s. $r = 0$, vil de også være uafhængige.

Fordeling	ξ -område	$w_x(\xi)$	$E\{X\}$	$\sigma^2\{X\}$
Rektangulær	$c < \xi < d$	$\frac{1}{d-c}$	$\frac{d+c}{2}$	$\frac{(d-c)^2}{12}$
Normal (Gauss)	$-\infty < \xi < +\infty$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left(-\frac{(\xi-m)^2}{2s^2}\right)$	m	s^2
Rayleigh	$0 < \xi < +\infty$	$\frac{\xi}{s^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2s^2}\right)$	$s\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$(2 - \frac{\pi}{2})s^2$
χ^2 ($N=1$)	$0 < \xi < +\infty$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \exp\left(-\frac{\xi}{2s^2}\right)$	s^2	$2s^4$
χ^2	$0 < \xi < +\infty$	$\frac{1}{2^{\frac{N}{2}} s^N \Gamma(\frac{N}{2})} \xi^{\frac{N-2}{2}} \exp\left(-\frac{\xi}{2s^2}\right)$	Ns^2	$2Ns^4$
Todimensional Gauss	$-\infty < \xi, \eta < +\infty$	$\frac{1}{2\pi s_1 s_2 \sqrt{1-r^2}} \times$ $\exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{(\xi-m_1)^2}{s_1^2} + \frac{(\eta-m_2)^2}{s_2^2} - \frac{2r(\xi-m_1)(\eta-m_2)}{s_1 s_2}\right)\right]$		
	Parametre	m_1, m_2, s_1, s_2, r ($ r < 1$)		

Tabel 5.1: Tabel over sandsynlighedstæthedsfunktioner.



Figur 5.3: Eksempler på forskellige sandsynlighedstæthedsfunktioner.

Såfremt en stokastisk variabel U fremkommer som summen af to stokastiske variable X og Y , d.v.s.

$$U = X + Y \quad (5.27)$$

kan man finde sandsynlighedstæthedsfunktionen for U af den todimensionale sandsynlighedstæthedsfunktion for X og Y af udtrykket

$$w_U(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{XY}(\xi - \eta, \eta) d\eta \quad (5.28)$$

Er X og Y stokastisk uafhængige, reduceres dette udtryk til

$$w_U(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} w_X(\eta) w_Y(\xi - \eta) d\eta \quad (5.29)$$

eller

$$w_U(\xi) = w_X(\xi) * w_Y(\xi) \quad (5.30)$$

Regningerne kan udvides til at gælde summen af et vilkårligt antal stokastiske variable.

5.1.2 Funktion af stokastisk variabel

Det er ofte således, at man ved anvendelser ønsker at benytte en anden stokastisk variabel end den, der oprindeligt er specificeret. Omsætningen kan f.eks. ske på basis af en tabel eller et eller flere matematiske udtryk.

I sådanne tilfælde er det af interesse at kunne beregne fordeling og sandsynlighedstæthedsfunktion for den nye variable såvel som forventede værdier af denne variable.

Lader man den stokastiske variable X have tæthedsfunktionen $w_X(\xi)$, og er den ny variable

$$Y = \beta(X) \quad , \quad (5.31)$$

hvor $\eta = \beta(\xi)$ er den ønskede variabeltransformation, baseres beregningen af $w_Y(\eta)$ på en passende summation af sandsynligheder.

Består $w_X(\xi)$ udelukkende af δ -funktioner, vil $w_Y(\eta)$ ligeledes kun indeholde δ -funktioner, og disse δ -funktioners styrke og placering findes let af korrespondencen $\eta = \beta(\xi)$.

Såfremt $w_X(\xi)$ ikke indeholder δ -funktioner, og er funktionen $\eta = \beta(\xi)$ differentiabel med kontinuert differentialkvotient, kan $w_Y(\eta)$ findes af udtrykket

$$P\{Y \in [\eta, \eta + d\eta]\} = \sum_q P\{X \in I_q\} \quad , \quad (5.32)$$

hvor I_q er de intervaller, hvori X befinder sig, når Y tilhører det anførte interval. Størrelsen af de indgående sandsynligheder for X findes af figur 5.4 til

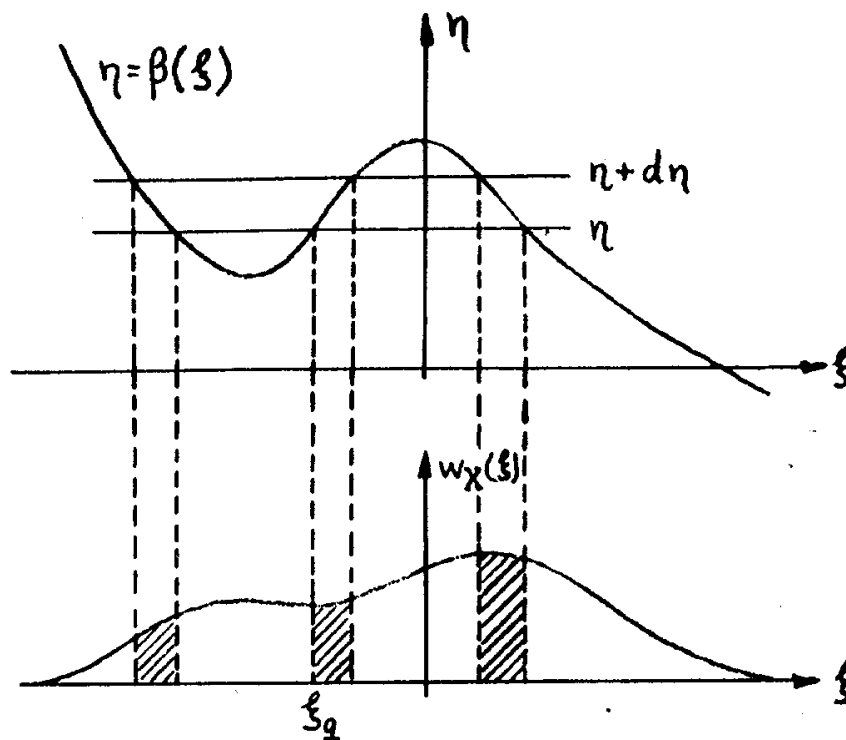
$$w_X(\xi_q) \frac{d\eta}{|\beta'(\xi_q)|} \quad , \quad (5.33)$$

hvor ξ_q er rødderne i ligningen $\beta(\xi) - \eta = 0$ og

$$\beta'(\xi_q) = \frac{d\beta(\xi)}{d\xi} \quad (5.34)$$

Såfremt $\beta'(\xi)$ kun er nul for et endeligt antal ξ -værdier, eksisterer den omvendte funktion $\xi = \gamma(\eta)$ til $\eta = \beta(\xi)$ i intervallerne, og man får da

$$w_Y(\eta) = \sum_q \frac{w_X(\xi)}{|\beta'(\xi)|} = \sum_q \frac{w_X(\gamma(\eta))}{|\beta'(\gamma(\eta))|} \quad (5.35)$$



Figur 5.4: Sandsynlighedstæthedsfunktioner ved transformation af stokastisk variabel.

Ved nogle anvendelser kan funktionen $\eta = \beta(\xi)$ være konstant i visse intervaller på ξ -aksen. I sådanne tilfælde vil $w_Y(\eta)$ indeholde δ -funktioner, hvis styrke kan findes ved en integration af $w_X(\xi)$ over de relevante intervaller.

Når $w_X(\xi)$ er sammensat, behandles tilfældet ved passende udnyttelse af de ovenfor givne fremgangsmåder.

Om de forventede værdier af Y , hvor $Y = \beta(X)$, kan man vise at

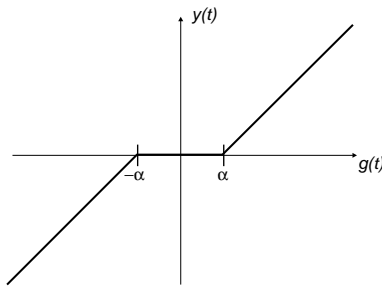
$$E\{Y^q\} = E\{\beta^q(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^q(\xi) w_X(\xi) d\xi. \quad (5.36)$$

Eksempel 5.1 Forstærker med ulineær overføringskarakteristik

En forstærker til brug for audiosignaler har en overføringskarakteristik, som er givet ved

$$y(t) = \begin{cases} k(g(t) + \alpha) & \text{for } g(t) < -\alpha \\ k(g(t) - \alpha) & \text{for } g(t) > \alpha \\ 0 & \text{for } |g(t)| \leq \alpha \end{cases}$$

Her er $g(t)$ indgangssignalet til forstærkeren, $y(t)$ er det tilsvarende udgangssignal, og α er en positiv, reel konstant. Overføringskarakteristikken er vist nedenfor:



Forstærkeren påtrykkes et støjsignal $x(t)$ på indgangen. Sandsynlighedstæthedsfunktionen for $x(t)$ er rektangulær og er givet ved

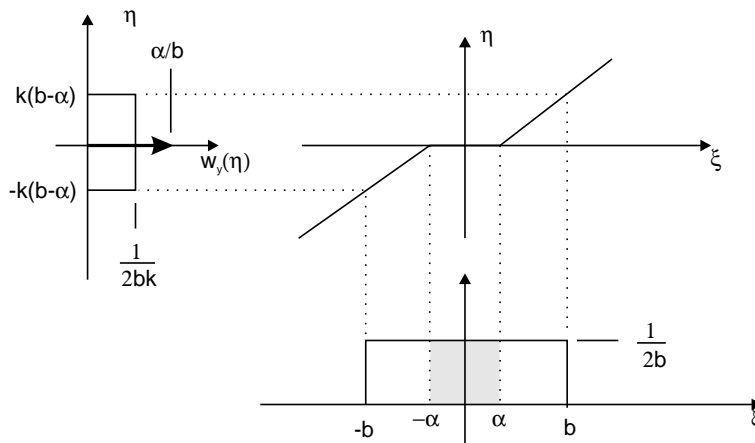
$$w_x(\xi) = \begin{cases} \beta & \text{for } |\xi| \leq b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Bestem β og sandsynlighedstæthedsfunktionen for udgangssignalet $y(t)$ udtrykt ved b , α og k når $b \leq \alpha$ og $b > \alpha$. Beregn ligeledes effekten af udgangssignalet for begge tilfælde.

Sandsynlighedstæthedsfunktionerne:

Idet $\int_{-b}^b w_x(\xi) d\xi = 1$ fås umiddelbart at $\beta = \frac{1}{2b}$.

For udgangssignalet for $b > \alpha$ fås:



$w_y(\eta)$ består af en deltafunktion og en rektangulær tæthed. Amplituden af deltafunktionen er givet ved

$$\frac{1}{2b} 2\alpha = \frac{\alpha}{b}$$

Højden af den rektangulære tæthed fås ud fra:

$$\begin{aligned} \beta(\xi) &= k(\xi - \alpha) \\ \beta'(\xi) &= k \\ w_y(\eta) &= \sum_q \frac{w_x(\xi)}{|\beta'(\xi)|} = \frac{\frac{1}{2b}}{|k|} = \frac{1}{2bk} \end{aligned}$$

For $b < \alpha$ fås altid udgangsværdien 0, og dermed er sandsynlighedstæthedsfunktion lige en deltafunktion med amplituden 1. Her er effekten af støjen 0.

For $b > \alpha$ er effekten:

$$\begin{aligned} P_y &= \int_{-k(b-\alpha)}^{+k(b-\alpha)} \eta^2 \left(\frac{1}{2bk} + \frac{\alpha}{b} \delta(\eta) \right) d\eta \\ &= \frac{1}{2bk} \frac{1}{3} ((k(b-\alpha))^3 + (k(b-\alpha))^3) \\ &= \frac{k^3(b-\alpha)^3}{bk3} = \frac{k^2(b-\alpha)^3}{3b} \end{aligned}$$

5.2 Stokastisk proces

Såfremt der til et forelagt eksperiments udfald knyttes et signal efter en eller anden vedtægt, kaldes den herved genererede mængde - ensemble - af signaler en stokastisk proces.

I det følgende benyttes betegnelserne

$$X(t), Y(t) \quad \text{eller} \quad X(n), Y(n) \quad (5.37)$$

for analoge og digitale stokastiske processer.

Skal en stokastisk proces beskrives, kan det ske på basis af sædvanlige begreber for stokastiske variable, idet man først betragter processen til et fast tidspunkt. På denne måde har man i signalernes værdier til dette tidspunkt fået knyttet tal til eksperimentets forskellige udfald. Signalværdierne til tidspunktet $t = t_0$ (eller $n = n_0$) er altså stokastiske variable, som kan karakteriseres ved passende sandsynlighedstæthedsfunktioner. Den simpleste af disse er den endimensionale, f.eks.⁶

$$w_X(\xi; t_0) \quad \text{eller} \quad w_X(\xi; n_0). \quad (5.38)$$

Den stokastiske proces' forventede værdi - eller middelværdi - vil altså normalt være en funktion af tiden, og den vil kunne fås af⁷

$$E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi w_X(\xi; t) d\xi = \mu_1(t). \quad (5.39)$$

På lignende vis vil f.eks.

$$E\{X^q(n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^q w_X(\xi; n) d\xi = \mu_q(n) \quad (5.40)$$

sædvanligvis være tidsafhængig.

På grund af, at man ved en stokastisk proces knytter signaler og ikke tal til eksperimentets udfald, er en vilkårlig stokastisk proces ikke komplet beskrevet ved angivelse af $w_X(\xi; t)$. Til en komplet beskrivelse kræves i almindelighed også kendskab til processens egenskaber, som de giver sig til kende ved forskellige sæt af tidspunkter t_1, t_2, t_3, \dots). Det er derfor indlysende, at en sådan entydig beskrivelse i de fleste tilfælde er særdeles uhåndterlig i praksis.

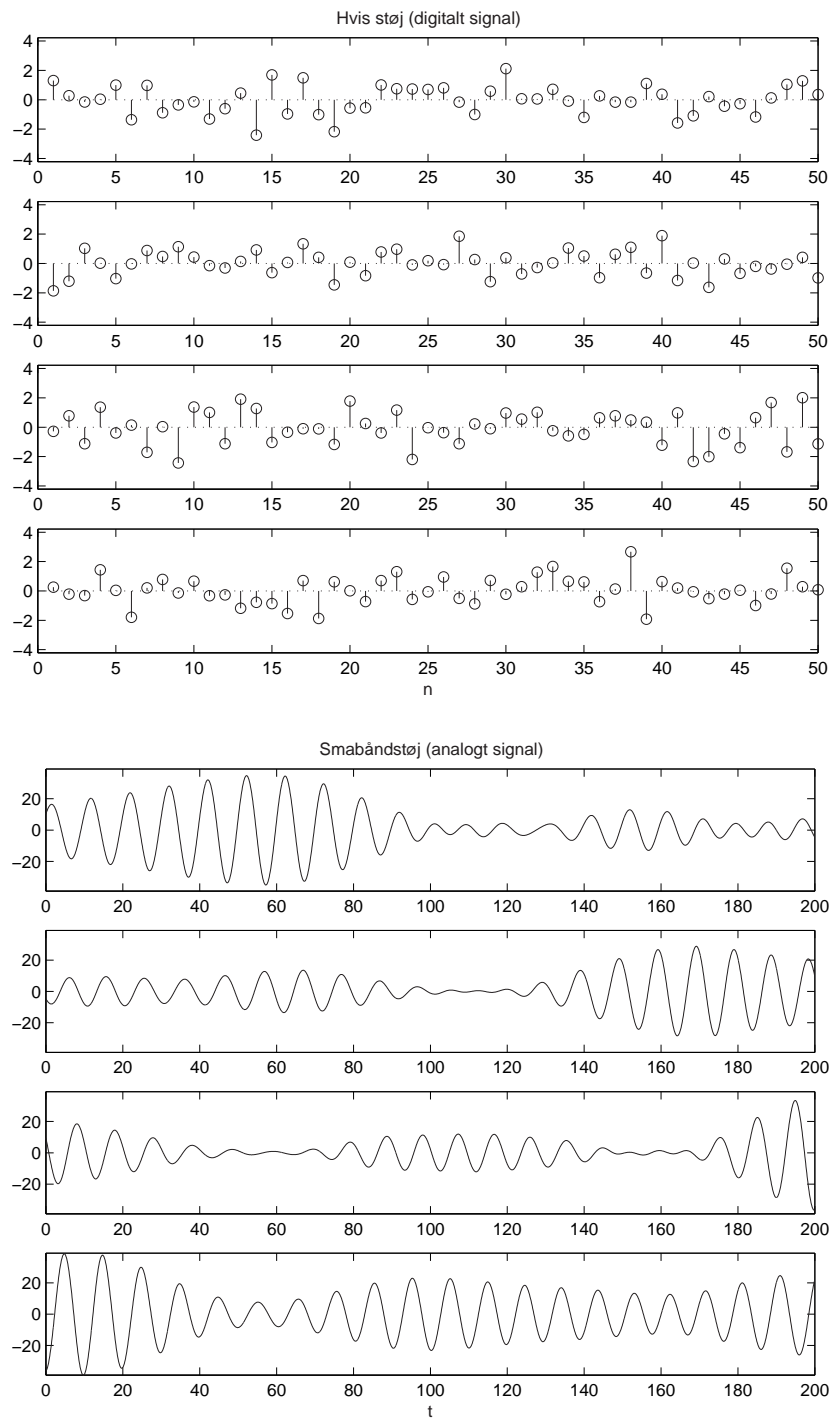
Betragter man først den stokastiske proces til to tidspunkter t_1 og t_2 fås et talpar, hvis elementer hver for sig er stokastiske variable.

Den todimensionale sandsynlighedstæthedsfunktion

$$w_X(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) \quad (5.41)$$

⁶ Angående definitionsområdet for ξ i de to funktioner, se afsnit 5.1

⁷ Her og i det følgende anvendes tidsparametrene t og n i flæng. De pågældende formler har naturligvis gyldighed for både "analog" tid t og "digital" tid n .



Figur 5.5: Eksempler på forskellige realisationer af digital og analoge stokastiske signaler.

kan benyttes til at beskrive dette talpars opførsel i stokastisk henseende, og den indgår i beregningen af de forskellige typer af forventede værdier, som kan have interesse. Disse forventede værdier for den stokastiske proces vil altså i det generelle tilfælde være funktioner af begge parametre t_1 og t_2 .

I beskrivelsen af stokastiske signaler spiller den forventede værdi

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1 \xi_2 w_X(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.42)$$

en væsentlig rolle, og den benævnes autokorrelationsfunktionen for signalet. I det følgende vil den ofte blive betegnet med

$$R_x(t_1, t_2) \quad \text{eller blot} \quad R(t_1, t_2) \quad . \quad (5.43)$$

Det tilsvarende udtryk for digitale stokastiske signaler er

$$R_X(n_1, n_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1 \xi_2 w_X(\xi_1, \xi_2; n_1, n_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.44)$$

Bemærk, at autokorrelationsfunktionen for et digitalt signal også er digital.

En yderligere udvidelse af antallet af tidspunkter i beskrivelsen af den stokastiske proces er i princippet enkel, men de praktiske problemer ved en sådan forøgelse af antallet af parametre synes ikke at stå mål med den forøgede indsigt i signalets opførsel, der følger hermed. Det er derfor almindelig praksis at standse ved autokorrelationsfunktionen som beskrivende element og acceptere den heraf følgende ukomplette signalbeskrivelse.

5.2.1 Stationær stokastisk proces

Såfremt sandsynlighedstæthedsfunktionerne (af vilkårlig høj orden) for en stokastisk proces er upåvirkede af en forskydning af tidsaksens nulpunkt, siges processen at være strengt stationær.

Denne betingelse indebærer, at sandsynlighedstæthedsfunktionen

$$w_X(\xi; t) = w_X(\xi) \quad (5.45)$$

er uafhængig af tiden. Dermed vil processens middelværdi være konstant, og de forventede værdier

$$E\{X^q(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^q w_X(\xi) d\xi, \quad q \text{ hel}, \quad (5.46)$$

er ligeledes tidsuafhængige

Når den stokastiske proces er stationær, vil endvidere sandsynlighedstæthedsfunktionen

$$w_X(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = w_X(\xi_1, \xi_2; |t_1 - t_2|) \quad (5.47)$$

kun afhænge af forskellen mellem t_1 og t_2 . Denne differens betegnes ofte med τ således, at den stationære proces' autokorrelationsfunktion bliver

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1 \xi_2 w_X(\xi_1, \xi_2; |\tau|) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.48)$$

for analoge signaler, og

$$R_X(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1 \xi_2 w_X(\xi_1, \xi_2; |k|) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.49)$$

for digitale signaler.

Hvis man for en stokastisk proces har, at kun sandsynlighedstæthedsfunktionerne op til en vis orden p er uafhængige af en forskydning af tidsaksens nulpunkt, siges processen at være stationær af p 'te orden.

At en proces er svagt stationær indebærer blot, at processens middelværdi er tidsuafhængig og, at dens autokorrelationsfunktion kun afhænger af forskellen mellem t_1 og t_2 . Bemærk, at da man normalt standser beskrivelsen af stokastiske processer ved den todimensionale sandsynlighedstæthedsfunktion, vil de fleste stokastiske signaler kun med sikkerhed kunne klassificeres som svagt stationære.

5.2.2 Ergodisk stokastisk proces

Blandt de stationære stokastiske processer indtager de ergodiske processer en særstilling. De signaler, som knyttes til det stokastiske eksperiments udfald, er i det ergodiske tilfælde så ensartede, at en vilkårlig af disse tidsfunktioner er tilstrækkelig til at karakterisere processen komplet.

For ergodiske signaler gælder det derfor, at forventede værdier - som indebærer kendskab til hele ensembles statistiske egenskaber -, og tidsmiddelværdier - som kun kræver kendskab til en enkelt af ensembles tidsfunktioner -, er identiske.

I det følgende vil betegnelsen $\langle \rangle$ blive brugt om tidsmiddelværdien af det eller de signaler, som står mellem vinkeltegnene. For det analoge signal⁸ $x(t)$ gælder altså, at

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} x(t) dt \quad , \quad (5.50)$$

medens man for et digitalt signal $x(n)$ har

$$\langle x(n) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_N x(n) \quad , \quad (5.51)$$

hvor \sum_N betyder, at summationen i tid strækker sig over N signalværdier udvalgt på en sådan måde, at man ved den viste grænseovergang omfatter hele signalets forløb.

At en stationær stokastisk proces er ergodisk betyder altså, at tidsmiddelværdier - over et vilkårligt af processens signaler - og sædvanlige middelværdier er lige store, f.eks.

$$E\{X(t)\} = \langle x(t) \rangle \quad (5.52)$$

og

$$E\{X(n)X(n+k)\} = \langle x(n)x(n+k) \rangle \quad . \quad (5.53)$$

Da det i praksis ofte vil være således, at man kun har kendskab til - eller kun kan måle på et enkelt signal fra den givne stokastiske proces, betyder det, at man - mere eller mindre - stiltiende går ud fra, at den betragtede stokastiske proces er ergodisk. Det bør bemærkes, at det i almindelighed ikke er nemt at vise, om et forelagt signal stammer fra en ergodisk proces.

Eksempel 5.2 Konstrueret eksempel på stokastisk proces

Lad der være givet et passende eksperiment, og lad der til hvert af eksperimentets udfald være knyttet en ohmsk modstand, hvis værdi er forskellig fra udfald til udfald. Lad endelig den støj, som opstår på grund af termiske elektronbevægelser i modstanden, og som findes over modstandens terminaler, være det signal, som knyttes til det enkelte udfald af eksperimentet. Samtlige modstande tænkes anbragt under varierende temperaturforhold (f.eks. udendørs).

⁸Bemærk, at der her er tale om et vilkårligt af de signaler, som er knyttede til det oprindelige eksperiment.

Såfremt man kan anse modstandene for at være af "samme type"⁹, har man på denne måde fået genereret en stokastisk proces $X(t)$.

Det er umiddelbart indlysende, at den således fremstillede stokastiske proces ikke er stationær, idet f.eks. sandsynlighedstæthedsfunktionen

$$w_X(\xi; t) \quad (5.54)$$

for processen vil have parametre, som varierer med den temperatur, modstandene er anbragt under, d.v.s. med tiden t (se også appendix D).

Anbringer man nu modstandene under helt konstante temperaturforhold, vil processen blive stationær. At processen ikke også er ergodisk, kan anskueliggøres på følgende måde. Antager man for enkelheds skyld, at

$$E\{X(t)\} = 0 \quad , \quad (5.55)$$

hvilket svarer til, at der ikke findes en jævnspændingskomponent over modstandens klemmer, vil man finde, at

$$\langle x_p^2(t) \rangle \neq \langle x_q^2(t) \rangle \quad \text{for } p \neq q \quad , \quad (5.56)$$

hvor $x_p(t)$ og $x_q(t)$ er to tilfældigt valgte signaler fra den foreliggende proces, idet det stokastiske signals effekt afhænger af den aktuelle modstands ohmske størrelse.

Det er altså ikke muligt at karakterisere processen på basis af undersøgelser af blot et af de signaler, som er knyttet til eksperimentets udfald.

Modificeres processen nu yderligere på den måde, at alle de modstande, som benyttes, har helt samme ohmske modstand og holdes ved samme temperatur, bliver processen ergodisk. Med denne problemstilling (og samme forudsætninger i øvrigt som ovenfor) vil man have, at

$$\langle x_p^2(t) \rangle = \langle x_q^2(t) \rangle \quad \text{for alle } p \text{ og } q \quad . \quad (5.57)$$

For tydelighedens skyld skal det her understreges, at denne lighed ikke er ensbetydende med, at

$$x_p(t) \equiv x_q(t) \quad \text{for } p \neq q \quad , \quad (5.58)$$

idet de to signaler jo stammer fra to "rumligt" forskellige modstande.

5.2.3 Stationær, normal stokastisk proces

Den endimensionale sandsynlighedstæthedsfunktion for en stationær normal stokastisk proces er givet ved¹⁰

$$w_X(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot s^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(\xi - m)^2}{2s^2}\right), \quad -\infty < \xi < \infty \quad , \quad (5.59)$$

(se også tabel 5.1). Konstanterne m og s er givet ved

$$\begin{aligned} m &= E\{X(t)\} \\ s^2 &= E\{(X(t) - E\{X(t)\})^2\} = E\{X^2(t)\} - E^2\{X(t)\} \quad . \end{aligned} \quad (5.60)$$

Antages det, at processens middelværdi $E\{X(t)\} = 0$ bliver

$$s^2 = E\{X^2(t)\} = R(0) \quad , \quad (5.61)$$

⁹Denne løsagtige sprogbrug skal dække over alle de betingelser, man nødvendigvis må opstille, inden man kan tale om en veldefineret proces. Det er f.eks. sådanne ting som samme - uendelige - levetid og konstans for de enkelte modstande, som indgår i eksperimentet. Såfremt de nævnte modstande er anbragt udendørs, må de naturligvis beskyttes passende, hvis miljøet er for fjendtiligt (regn, sne, tåge, radioaktivitet eller lignende).

¹⁰Bemærk, at et digitalt signal strengt taget ikke kan være normalt fordelt.

hvor $R(\tau)$ er processens autokorrelationsfunktion.

Det kan let vises, at de lige højere ordens momenter for processen i dette tilfælde er givet ved

$$E\{x^{2q}(t)\} = \frac{(2q)!}{2^q q!} s^{2q} \quad , \quad (5.62)$$

medens alle ulige momenter er nul.

Den todimensionale sandsynlighedstæthedsfunktion for en stationær normal proces med middelværdien 0 kan udtrykkes på formen

$$w_X(\xi_1, \xi_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{R^2(0) - R^2(\tau)}} \cdot \exp\left(-\frac{R(0)\xi_1^2 + R(0)\xi_2^2 - 2R(\tau)\xi_1\xi_2}{2(R^2(0) - R^2(\tau))}\right) \quad . \quad (5.63)$$

Af udtrykket fremgår det, at er $R(\tau) = 0$ enten for diskrete τ -værdier eller for værdier af τ i et interval vil man få, at

$$w_X(\xi_1, \xi_2; \tau) = w_X(\xi_1)w_X(\xi_2) \quad . \quad (5.64)$$

Det stokastiske signals værdier til tidspunkter med afstanden τ er altså under disse omstændigheder stokastisk uafhængige.

Det er muligt at vise, at alle flerdimensionale sandsynlighedstæthedsfunktioner er funktioner af $R(\tau)$ (og m såfremt $m \neq 0$). Dette indebærer, at en svagt stationær normal proces også vil være strengt stationær.

5.3 Korrelationsfunktion og effekttæthedsspektrum

Som nævnt i kap. 5.2 er første og anden ordens momenterne for en stokastisk proces vigtige midler til at karakterisere stokastiske signaler i praksis. Af disse giver middelværdier oplysning om en eventuel jævnspændingskomponent¹¹ i det stokastiske signal, og autokorrelationsfunktionen, som jo er en funktion af tiden, er basis for den spektrale beskrivelse af stokastiske signaler.

5.3.1 Autokorrelationsfunktionen

Autokorrelationsfunktionerne givet ved

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t + \tau)\} \quad \text{og} \quad R_X(k) = E\{X(n)X(n + k)\} \quad (5.66)$$

for de stationære stokastiske signaler $X(t)$ og $X(n)$ udtrykker, som det ses, den middelsammenhæng, der er mellem to øjebliksværdier af signalet med en indbyrdes tidsafstand på τ eller k .

Beslægtet med autokorrelationsfunktionerne er autocovariansen

$$C_X(\tau) = E\{[X(t) - E\{X(t)\}][X(t + \tau) - E\{X(t)\}]\} \quad . \quad (5.67)$$

der, som det ses, er sammenfaldende med autokorrelationsfunktionen, når $E\{X(t)\} = 0$. For digitale stokastiske signaler defineres autocovariansen på tilsvarende måde.

¹¹Jævnfør, at man for ergodiske signaler har, at

$$E\{X(n)\} = \langle x(n) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_N x(n) \quad . \quad (5.65)$$

Man kan meget vel argumentere mod, at der her skal optræde et deterministisk signal - "DC" - i forbindelse med en omtale af stokastiske funktioner. Som det vil fremgå af det følgende, optræder en sådan DC imidlertid ofte i praksis, f.eks. i måleopstillinger.

Da $w_X(\xi_1, \xi_2; \tau)$ og $w_X(\xi_1, \xi_2; k)$ kun afhænger af den numeriske værdi af tidsparameteren, er autokorrelationsfunktionen en lige funktion d.v.s.

$$\underline{R_X(\tau) = R_X(-\tau)} \quad \text{og} \quad \underline{R_X(k) = R_X(-k)} \quad . \quad (5.68)$$

I analogi med forholdene for stokastiske variable er signalets varians defineret ved

$$\sigma^2\{X(n)\} = E\{[X(n) - E\{X(n)\}]^2\} \quad (5.69)$$

for digitale signaler og på tilsvarende vis for analoge signaler. Eftersom

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\xi - E\{X(n)\})^2 w_X(\xi) d\xi = E\{X^2(n)\} - E^2\{X(n)\} \quad (5.70)$$

vil det altså gælde, at

$$R_X(0) = E\{X^2(n)\} = \sigma^2\{X(n)\} + E^2\{X(n)\} \quad (5.71)$$

(tilsvarende udtryk for analoge signaler). Heraf følger, at

$$R_X(0) \geq 0 \quad . \quad (5.72)$$

Benytter man denne egenskab ved et vilkårligt stationært stokastisk signal på signalet

$$Y(t) = X(t) \pm X(t + \tau) \quad (5.73)$$

er altså

$$E\{(X(t) \pm X(t + \tau))^2\} = 2R_X(0) \pm 2R_X(\tau) \geq 0 \quad (5.74)$$

hvilket er ensbetydende med

$$\underline{R_X(0) \geq |R_X(\tau)|} \quad \text{for} \quad \tau \neq 0 \quad . \quad (5.75)$$

For de fleste stokastiske processer vil det være således, at

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R(\tau) = R_\infty \quad \text{og} \quad \lim_{|k| \rightarrow \infty} R(k) = R_\infty \quad (5.76)$$

hvor R_∞ er en positiv konstant. Det kan vises, at

$$\underline{R_\infty = E^2\{X(t)\}} \quad \text{og} \quad \underline{R_\infty = E^2\{X(n)\}} \quad . \quad (5.77)$$

Denne grænseværdi er altså processens DC-effekt¹². Følgelig må den stokastiske proces' AC-effekt være givet ved

$$\sigma^2\{X(t)\} \quad \text{og} \quad \sigma^2\{X(n)\} \quad , \quad (5.78)$$

da den samlede effekt P findes som autokorrelationsfunktionens værdi til tiden 0.

For ergodiske signaler gælder det som anført tidligere, at tidsmiddelværdier erstatter forventede værdier, altså

$$P = \langle x_q^2(t) \rangle \quad \text{og} \quad P = \langle x_q^2(n) \rangle \quad (5.79)$$

¹²Der er også her tale om, at man forestiller sig signalet som en spænding eller en strøm, og at effekten er den effekt, som afsættes af signalet i en 1Ω 's modstand.

5.3.2 Spektret af et stokastisk signal

Spektret af et stokastisk signal defineres som den fouriertransformerede af signalets autokorelationsfunktion. For analoge signaler betyder det, at

$$R_X(\tau) \leftrightarrow S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (5.80)$$

Da $R_X(\tau)$ er en lige funktion i τ , vil $S_X(f)$ være en reel og lige funktion af frekvensen f . Af udtrykket

$$P = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df \quad (5.81)$$

ses det, at $S_X(f)$ er et effektæthedsspektrum. Det giver oplysning om, inden for hvilke frekvensområder det stokastiske signal har spektrale komponenter. Man kan vise (se senere), at

$$S_X(f) \geq 0 \quad . \quad (5.82)$$

På tilsvarende vis er spektret af et stokastisk digitalt signal givet ved

$$R_X(k) \xleftrightarrow{\Delta T} S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k) e^{-j2\pi f k \Delta T}. \quad (5.83)$$

Også i dette tilfælde er $S_X(f)$ en lige funktion i f , ligesom det jo er periodisk med perioden ΔT^{-1} .

Den samlede effekt P af signalet findes af¹³

$$P = R_X(0) = \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} S_X(f) df \quad , \quad (5.84)$$

hvor $f_g = (2\Delta T)^{-1}$.

Det er altså - som det ses - sædvanen at benytte et signal med endelig energi, $R_X(\tau)$ eller $R_X(k)$, som basis for en beskrivelse af stokastiske signalers spektrale opførsel. Dette medfører bl.a., at hele det matematiske grundlag, som er omtalt tidligere, også finder anvendelse her.

5.4 Lineær og ikke-lineær kombination af stokastiske signaler

I praksis er det en meget hyppigt forekommende situation, at man har forelagt et stokastisk signal, som er fremkommet som en kombination af to eller flere stokastiske signaler. For at kunne karakterisere sådanne kombinerede signaler (f.eks. ved en autokorrelationsfunktion) er der behov for at indføre begreberne krydskorrelation og krydsspektrum.

5.4.1 Krydskorrelationsfunktion

Krydskorrelationsfunktionen for to stationære analoge stokastiske signaler $X(t)$ og $Y(t)$ er defineret på følgende måde

$$R_{XY}(\tau) = E\{X(t)Y(t+\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \eta w_{XY}(\xi, \eta; \tau) d\xi d\eta \quad . \quad (5.85)$$

¹³Bemærk, at $S_X(f)$ i dette tilfælde er et effektspektrum. Ordene "effektæthedsspektrum" og "effektspektrum" benyttes i øvrigt ofte i flæng.

Krydskorrelationsfunktionen udtrykker graden af lighed - ”middelsammenhængen” - mellem de to signaler $X(t)$ og $Y(t)$.

Det tilsvarende udtryk for to digitale signaler er

$$R_{XY}(k) = E\{X(n)Y(n+k)\} \quad (5.86)$$

Da sandsynlighedstæthedsfunktionerne

$$w_{XY}(\xi, \eta; \tau) \quad \text{og} \quad w_{XY}(\xi, \eta; k) \quad (5.87)$$

normalt ikke er lige funktioner i τ eller k , vil det i almindelighed gælde, at

$$R_{XY}(\tau) \neq R_{XY}(-\tau) \quad (\tau \neq 0) \quad \text{og} \quad R_{XY}(k) \neq R_{XY}(-k) \quad (k \neq 0) \quad (5.88)$$

Derimod vil

$$\underline{R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)} \quad \text{og} \quad \underline{R_{XY}(k) = R_{YX}(-k)} \quad , \quad (5.89)$$

hvilket kan ses gennem en simpel variabeltransformation.

Opfattes ligningen

$$E\{(X(t) + aY(t + \tau))^2\} = R_X(0) + a^2R_Y(0) + 2aR_{XY}(\tau) \geq 0 \quad (5.90)$$

hvor a er en reel konstant og $X(t)$ og $Y(t)$ analoge stokastiske signaler, som et kvadratisk udtryk i a , der vil gælde for alle værdier af a , må

$$(2R_{XY}(\tau))^2 - 4R_Y(0)R_X(0) < 0 \quad (5.91)$$

og dermed vil

$$\underline{R_{XY}^2(\tau) < R_X(0)R_Y(0)} \quad (5.92)$$

Af specialtilfældene $a = 1$ og $a = -1$ fås endvidere umiddelbart

$$\underline{2 | R_{XY}(\tau) | < R_X(0) + R_Y(0)} \quad (5.93)$$

De tilsvarende udtryk for digitale stokastiske signaler er

$$\underline{R_{XY}^2(k) < R_X(0) + R_Y(0)} \quad (5.94)$$

og

$$\underline{2 | R_{XY}(k) | < R_X(0) + R_Y(0)} \quad (5.95)$$

Såfremt det for to stokastiske digitale signaler $X(n)$ og $Y(n)$ gælder, at

$$R_{XY}(k_1) = E\{X(n)Y(n - k_1)\} = E\{X(n)\}E\{Y(n)\} \quad (5.96)$$

hvor k_1 er en konstant, siges de to signaler at være ukorrelerede ved denne k -værdi. Er

$$R_{XY}(k) = E\{X(n)\}E\{Y(n)\} \quad (5.97)$$

for enhver værdi af k , er de to signaler helt ukorrelerede.

Betingelserne

$$R_{XY}(k_1) = 0 \quad \text{og} \quad R_{XY}(k) = 0 \quad (\text{for alle } k) \quad (5.98)$$

medfører, at de to signaler er henholdsvis ortogonale for $k = k_1$, og helt ortogonale¹⁴. Bemærk, at er blot et af signalernes DC-værdi nul, bliver begreberne ”ukorrelerede” og ”ortogonale” sammenfaldende.

¹⁴se også afsnit 5.1.1

Medens de ovenfor anførte betegnelser giver visse bånd på signalernes forventede værdier, siger man om to stokastiske signaler, at de er stokastisk uafhængige, såfremt flerdimensionale fordelinger (og sandsynlighedstæthedsfunktioner) for signalerne kan skrives som produkter af fordelinger (eller sandsynlighedstæthedsfunktioner), hvor de enkelte funktioner kun hidrører fra et af de to signaler, f.eks.

$$w_{XY}(\xi, \eta; k) = w_X(\xi) \cdot w_Y(\eta) \quad . \quad (5.99)$$

Som følge heraf vil stokastisk uafhængige signaler være helt ukorrelerede. Det omvendte gælder kun signaler, hvis den todimensionale sandsynlighedstæthedsfunktion er normalfordelingen (se også kap. 5.2.3).

De ovenfor anførte betegnelser bringes naturligvis også i anvendelse i det tilfælde, hvor de indgående signaler er analoge.

Det vil i øvrigt gælde, at såfremt de indgående signaler er ergodiske, kan forventede værdier erstattes med tidsmiddelværdier på sædvanlig vis.

5.4.2 Krydsspektret for to stokastiske signaler

Krydsspektret for to stokastiske signaler defineres som den fouriertransformerede af krydskorrelationsfunktionen for de to signaler, altså

$$R_{XY}(\tau) \longleftrightarrow S_{XY}(f) \quad \text{og} \quad R_{XY}(k) \xleftrightarrow{\Delta T} S_{XY}(f) \quad . \quad (5.100)$$

Det bemærkes, at $S_{XY}(f)$ normalt er en kompleks størrelse, at

$$S_{XY}(f) = S_{XY}^*(-f) \quad (5.101)$$

samt, at

$$S_{YX}(f) = S_{XY}^*(f) \quad . \quad (5.102)$$

Krydsspektret rummer oplysninger om, inden for hvilke frekvensområder de to signaler har en vis lighed, idet dette spektrum vil være $\neq 0$ inden for sådanne områder.

5.4.3 Multiplikation af stokastisk signal med en konstant

Denne simple modifikation af det stokastiske signal $X(t)$ kan udtrykkes på formen

$$\underline{Y(t) = aX(t)} \quad , \quad (5.103)$$

hvor a er en reel konstant, som er $\neq 0$, og $E\{X(t)\} = 0$.

Den endimensionale sandsynlighedstæthedsfunktion for signalet $Y(t)$ kan findes på den måde, der er omtalt i kap. 5.1.2. Man får

$$w_Y(\eta) = \frac{1}{|a|} w_X(\eta/a) \quad . \quad (5.104)$$

Signalet $Y(t)$'s effekt P_Y findes let til

$$P_Y = a^2 P_X \quad , \quad (5.105)$$

hvor P_X er $X(t)$'s effekt. Af udtrykket

$$R_Y(\tau) = E\{aX(t)aX(t+\tau)\} = a^2 R_X(\tau) \quad (5.106)$$

fås dernæst umiddelbart, at

$$S_Y(f) = a^2 S_X(f) \quad . \quad (5.107)$$

Det er indlysende, at $Y(t)$ er et stationært signal, når $X(t)$ er det.

Ved visse tekniske anvendelser træffer man en lidt anden form for signalkombination, idet

$$\underline{U(t) = aX(t) + b} \quad , \quad (5.108)$$

hvor a og b er reelle konstanter og $a \neq 0$.

b har i dette tilfælde den betydning, at der til signalet $aX(t)$ adderes det konstante (DC) signal b . Med betegnelserne fra kap. 5.1.2 vil $\xi = \gamma(\eta) = (\eta - b)/a$ og $\beta'(\xi) = a$. Heraf fås, at

$$w_U(\eta) = \frac{1}{|a|} w_X((\eta - b)/a) \quad . \quad (5.109)$$

Signalet $U(t)$'s effekt er da (idet $E\{X(t)\} = 0$)

$$P_U = a^2 P_X + b^2 \quad , \quad (5.110)$$

dets autokorrelationsfunktion

$$R_U(\tau) = a^2 R_X(\tau) + b^2 \quad , \quad (5.111)$$

og effekttæthedsspektret¹⁵

$$S_U(f) = a^2 S_X(f) + b^2 \delta(f) \quad . \quad (5.112)$$

Alle de anførte udtryk kan også formuleres tilsvarende for digitale signaler.

5.4.4 Linearkombination af to stokastiske signaler

Såfremt man af to stokastiske signaler $X(t)$ og $Y(t)$ danner

$$U(t) = aX(t) + bY(t) \quad , \quad (5.113)$$

hvor a og b er konstanter, kan man finde den endimensionale sandsynlighedstæthedsfunktion for $U(t)$ ved passende anvendelse af resultaterne i kap. 5.1.1 og kap. 5.4.3.

Af udtrykket

$$\begin{aligned} R_U(\tau) &= E\{(aX(t) + bY(t))(aX(t + \tau) + bY(t + \tau))\} \\ &= a^2 R_X(\tau) + b^2 R_Y(\tau) + ab R_{XY}(\tau) + ab R_{YX}(\tau) \end{aligned} \quad (5.114)$$

ses det, at beregning af autokorrelationen for $U(t)$ kræver kendskab til såvel $R_X(\tau)$ og $R_Y(\tau)$ som til krydskorrelationsfunktionen¹⁶ $R_{XY}(\tau)$.

Signalets samlede effekt er

$$P_U = a^2 R_X(0) + b^2 R_Y(0) + 2ab R_{XY}(0) \quad . \quad (5.115)$$

Hvis $R_{XY}(0)$ er negativ og af en passende størrelse, er der altså intet til hinder for, at P_U vil kunne være mindre end både P_X og P_Y . $U(t)$'s effektspektrum beregnes ud fra

$$S_U(f) = a^2 S_X(f) + b^2 S_Y(f) + 2ab \operatorname{Re}[S_{XY}(f)] \quad (5.116)$$

(se kap. 5.4.2).

¹⁵Bemærk, at såfremt $S_X(f)$ i forvejen indeholder en δ -funktion ved $f = 0$ af styrken d^2 , hvor d er en konstant, får den resulterende δ -funktion ved $f = 0$ styrken $(ad + b)^2$. Det er selvfølgelig muligt, at $ad + b$ vil kunne få værdien 0.

¹⁶Bemærk, at $ab(R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau)) = ab(R_{XY}(\tau) + R_{XY}(-\tau))$.

Er $X(t)$ og $Y(t)$ helt ukorrelerede (eller stokastisk uafhængige) og er enten $E\{X(t)\} = 0$ eller $E\{Y(t)\} = 0$, simplificeres udtrykkene til

$$R_U(\tau) = a^2 R_X(\tau) + b^2 R_Y(\tau), \quad P_U = a^2 P_X + b^2 P_Y \quad (5.117)$$

og

$$S_U(f) = a^2 S_X(f) + b^2 S_Y(f) \quad . \quad (5.118)$$

Der gælder lignende udtryk for digitale signaler.

5.4.5 Produkt af to stokastiske signaler

Visse ikke-stationære signaler, som optræder i praksis, kan opfattes som produktet af to stokastiske signaler $X(t)$ og $Y(t)$, d.v.s.

$$V(t) = X(t)Y(t) \quad . \quad (5.119)$$

Kun hvor de indgående signaler er stokastisk uafhængige, bliver resultatsignalet rimeligt simpelt. Dets autokorrelationsfunktion kan da vises at være

$$R_V(\tau) = R_X(\tau)R_Y(\tau) \quad . \quad (5.120)$$

Dette resultat kan også formuleres for digitale signaler.

5.5 Korrelationsfunktion for deterministiske signaler med endelig energi

I forbindelse med filtrering af stokastiske signaler er det også hensigtsmæssigt at introducere autokorrelationsfunktionen for signaler med endelig energi. For et analogt signal $h(t)$ med endelig energi er denne givet ved

$$R_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t + \tau)dt. \quad (5.121)$$

Bemærk, at der her ikke normeres med integrationstiden som for ergodiske stokastiske signaler. En forståelse af dannelsen af autokorrelationen kan fås fra omskrivningen

$$R_h(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)h(\theta + \tau)d\theta. \quad (5.122)$$

Heraf ses, at $R_h(\tau)$ kan beregnes ved at folde en tidsreverseret version af signalet med sig selv. Dette er illustreret på figur 5.6. Heraf fås også energitæthedsspektret for autokorrelationsfunktionen

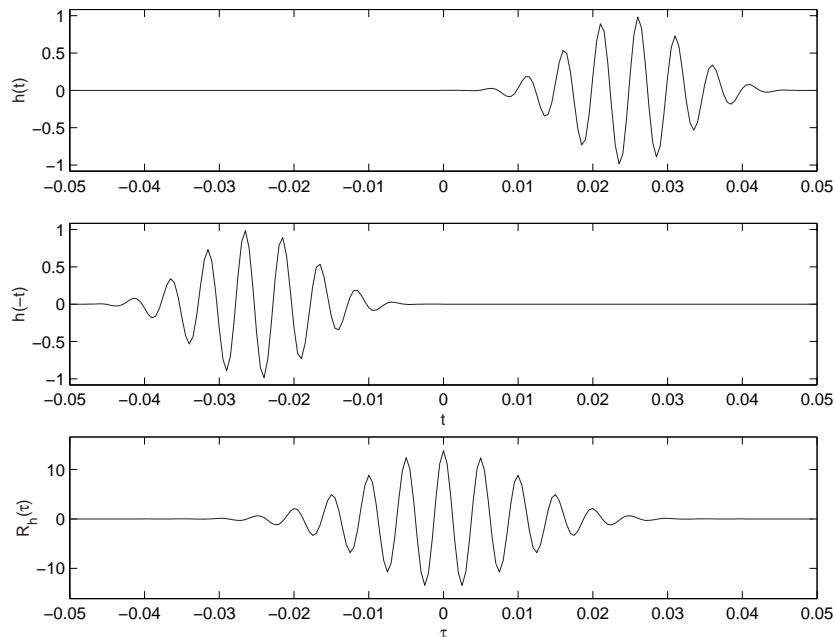
$$R_h(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) \leftrightarrow H^*(f)H(f) = |H(f)|^2 \quad (5.123)$$

For et digitalt signal $h(n)$ med endelig energi fås

$$R_h(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)h(n + k), \quad (5.124)$$

hvilket også kan skrives som

$$R_h(k) = h(-k) * h(k) \xrightarrow{\Delta T} H^*(f)H(f) = |H(f)|^2 \quad (5.125)$$



Figur 5.6: Beregning af autokorrelationsfunktionen for et analogt signal med endelig energi.

5.6 Korrelationsfunktion og effektspektrum for periodiske signaler

I praksis optræder deterministiske periodiske signaler undertiden sammen med stokastiske signaler. Da beskrivelsen af et stokastisk signal normalt foregår på basis af signalets autokorrelationsfunktion eller dets effekttæthedsspektrum, kan det være nyttigt også at definere korrelationsfunktioner for periodiske signaler.

5.6.1 Autokorrelationsfunktion for et periodisk signal

For et periodisk analogt signal $g(t)$ defineres signalets autokorrelationsfunktion ved¹⁷

$$R_g(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} g(t)g(t + \tau)dt \quad (5.126)$$

(se figur 5.7). $R_g(\tau)$ er igen et periodisk signal med samme periodetid T som $g(t)$, hvilket let verificeres, hvis τ erstattes med $\tau + T$ i (5.126).

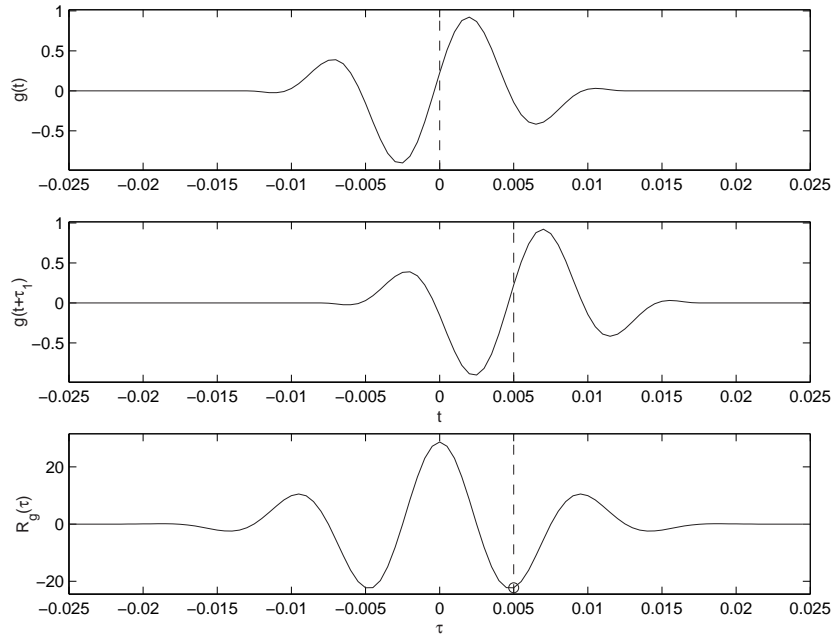
En autokorrelationsfunktion er endvidere en lige funktion af tiden τ , d.v.s. $R_g(\tau) = R_g(-\tau)$. Denne egenskab verificeres også let ved en variabeltransformation, idet man udnytter, at integrationsintervallet i definitionen for $R_g(\tau)$ ikke behøver at starte til $-\frac{1}{2}T$, men blot skal omfatte 1 periode af¹⁸ $g(t)$.

¹⁷Bemærk forskellen mellem denne definition og den, der benyttes for signaler med endelig energi i afsnit 5.5.

¹⁸Strengt taget kan man her nøjes med et helt antal perioder eller med udtrykket

$$R_g(\tau) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_1} g(t)g(t + \tau)dt$$

se også kap.7.1.2.



Figur 5.7: Beregning af autokorrelationsfunktionen for et periodisk signal.

Af udtrykket

$$R_g(0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} g^2(t) dt \quad (5.127)$$

ses det, at $R_g(0) = P$, hvor P er signalets effekt (se også kap. 2.4).

Autokorrelationsfunktionen for et periodisk digitalt signal $g(n)$ defineres tilsvarende ved

$$R_g(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(n)g(n+k) \quad (5.128)$$

hvor k er hel. Også i dette tilfælde har man

$$R_g(k) = R_g(k+N), \quad R_g(k) = R_g(-k) \quad \text{og} \quad P = R_g(0) \quad (5.129)$$

5.6.2 Effektspektrum for et periodisk signal

Spektrret $S_g(m)$ for det periodiske signal $R_g(\tau)$ kaldes effektspektret for signalet $g(t)$, og man har altså

$$R_g(\tau) \xleftrightarrow{T} S_g(m) \quad (5.130)$$

Begrundelsen for denne betegnelse kan let ses, hvis udtrykket $R_g(\tau)$ omformes til

$$R_g(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} g(-t)g(\tau-t) dt = g(-\tau) * g(\tau) \quad (5.131)$$

Heraf følger, at

$$S_g(m) = G^*(m)G(m) = |G(m)|^2 \quad (5.132)$$

hvor $g(t) \xleftrightarrow{T} G(m)$, samt at den samlede effekt P i $g(t)$ kan skrives på formen

$$P = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_g(m) \quad (5.133)$$

Eftersom $R_g(\tau)$ er en lige funktion i τ , vil effektspektret $S_g(m)$ være en lige og reel funktion i m . Bemærk, at $S_g(m)$ er uafhængig af $g(t)$'s fasespektrum, hvilket igen indebærer, at forskellige signaler kan have samme effektspektrum og dermed samme autokorrelationsfunktion. I øvrigt er, som det umiddelbart ses, $S_g(m) \geq 0$. Effektspektret $S_g(m)$ for et periodisk digitalt signal $g(n) \xleftrightarrow{N} G(m)$ defineres på tilsvarende måde ved udtrykket

$$R_g(k) \xleftrightarrow{N} S_g(m) \quad (5.134)$$

og det vil som ved periodiske analoge signaler gælde, at

$$S_g(m) = |G(m)|^2, \quad P = \sum_{m=0}^{N-1} S_g(m) \quad \text{og} \quad S_g(m) \geq 0 \quad (5.135)$$

5.6.3 Krydskorrelationsfunktion for to periodiske signaler

Krydskorrelationsfunktionen $R_{gh}(\tau)$ for to periodiske analoge signaler $g(t)$ og $h(t)$ med samme periodetid defineres ved

$$R_{gh}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} g(t)h(t+\tau)dt \quad (5.136)$$

$R_{gh}(\tau)$ er også periodisk i τ med perioden T , så $R_{gh}(\tau) = R_{gh}(\tau + T)$. Krydskorrelationsfunktionen er ikke nogen lige funktion i¹⁹ τ . Derimod gælder der relationen

$$R_{gh}(\tau) = R_{hg}(-\tau) \quad (5.137)$$

hvilket let ses ud fra definitionen på krydskorrelationsfunktionen, variabeltransformationen $\theta = t + \tau$ og den kendsgerning, at den viste integration - blot den udstrækkes over en hel periode - er uafhængig af starttidspunktets beliggenhed på tidsaksen.

Krydskorrelationsfunktionen for to periodiske digitale signaler $g(n)$ og $h(n)$ er også periodisk med samme periode N som $g(n)$ og $h(n)$, og den beregnes ud fra udtrykket

$$R_{gh}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(n)h(n+k) \quad (5.138)$$

Det ses let, at $R_{gh}(k) = R_{hg}(-k)$.

Bemærk, at selv om de viste udtryk for $R_{gh}(\tau)$ og $R_{gh}(k)$ indebærer integration eller summation over 1 periode af produktet af signalerne, vil det gælde, at

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_{T_1} g(t)h(t+\tau)dt = R_{gh}(\tau) \quad (5.139)$$

og

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{N_0} \sum_{N_0} g(n)h(n+k) = R_{gh}(k) \quad (5.140)$$

(se også kap. 7.1.2).

¹⁹Dette gælder dog ikke, såfremt $h(t)$ er proportional med $g(t)$. I dette tilfælde benyttes undertiden betegnelsen helt korrelerede om signalerne.

5.6.4 Krydseffektspektrum for to periodiske signaler

Den fouriertransformerede $S_{gh}(m)$ af $R_{gh}(\tau)$ kaldes krydseffektspektret for de to signaler $g(t)$ og $h(t)$. Dette spektrum er normalt en kompleks funktion af frekvensparameteren m . Af omformningen

$$R_{gh}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} g(-t)h(\tau - t)dt = h(\tau) * g(-\tau) \quad (5.141)$$

får man umiddelbart, at

$$S_{gh}(m) = H(m)G^*(m) = H(m)G(-m) \quad (5.142)$$

hvor $g(t) \xrightarrow{T} G(m)$ og $h(t) \xrightarrow{T} H(m)$.

For digitale signaler gælder

$$R_{gh}(k) \xrightarrow{N} S_{gh}(m) = H(m)G^*(m) \quad (5.143)$$

hvor $g(n) \xrightarrow{N} G(m)$ og $h(n) \xrightarrow{N} H(m)$. Krydseffektspektret giver altså oplysning om, ved hvilke frekvenser begge de to signaler har spektrale komponenter. Som udtrykkene for $S_{gh}(m)$ viser, vil der eksistere mange forskellige signalpar, som har samme krydseffektspektrum og dermed samme krydskorrelationsfunktion.

5.6.5 Korrelationsfunktioner og effektspektre for rene toner

Det analoge rentonesignal

$$g(t) = a_1 \cos(2\pi f_0 t + \theta_1)$$

og det digitale rentonesignal

$$g(n) = a_1 \cos(2\pi \frac{n}{N} t + \theta_1),$$

hvor a_1 og θ_1 er konstanter, og hvor perioderne er henholdsvis $T = 1/f_0$ og N , har som bekendt kun spektrale komponenter ved $m = \pm 1$ (se kap. 2.5.1). I begge tilfælde er

$$S_g(\pm 1) = |G(\pm 1)|^2 = a_1^2/4 \quad (5.144)$$

Følgelig er autokorrelationsfunktionerne for de to signaler

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2}a_1^2 \cos 2\pi f_0 \tau \quad \text{og} \quad R_g(k) = \frac{1}{2}a_1^2 \cos 2\pi \frac{k}{N} \quad (5.145)$$

Bemærk, at signalernes fasevinkel θ_1 ikke indgår i udtrykkene for autokorrelationsfunktionen, hvorfor alle rene toner med samme frekvens og samme styrke har den viste autokorrelationsfunktion.

Krydskorrelationsfunktionen for to rentonesignaler med samme frekvens findes også enklest ved spektrale betragtninger. Er $g(t)$ og $g(n)$ givet ved udtrykkene ovenfor, og er $h(t) = a_2 \cos(2\pi f_0 t + \theta_2)$ og $h(n) = a_2 \cos(2\pi n/N + \theta_2)$, vil

$$S_{gh}(\pm 1) = \frac{a_1 a_2}{4} e^{\pm j(\theta_2 - \theta_1)} \quad (5.146)$$

hvilket medfører, at

$$R_{gh}(\tau) = \frac{a_1 a_2}{2} \cos(2\pi f_0 t + (\theta_2 - \theta_1)) \quad (5.147)$$

og

$$R_{gh}(k) = \frac{a_1 a_2}{2} \cos(2\pi \frac{k}{N} + (\theta_2 - \theta_1)) \quad (5.148)$$

Som det kunne ventes indgår produktet af a_1 og a_2 samt forskellen mellem θ_2 og θ_1 i udtrykket for krydskorrelationsfunktionen. Har de to rene toner ikke samme mindste periode, vil både $R_{gh}(\tau) \equiv 0$ og $R_{gh}(k) \equiv 0$.

5.6.6 Korrelationsfunktioner for periodiske signaler med lige store spektrale komponenter

Et periodisk båndbegrænset signal, hvis spektrale komponenter alle er lige store og reelle, vil antage sin største værdi ved $t = 0$ eller $n = 0$, og ingen andre periodiske signaler med spektrale komponenter ved de samme frekvenser og med samme effekt vil antage værdier, der er større.

Et sådant signal ($g(t)$ eller $g(n)$) med lige store og reelle spektrale komponenter er endvidere kendetegnet ved, at dets autokorrelationsfunktion er proportional med signalet selv og altså har samme form som signalet. Dette følger umiddelbart af at $R_g(\tau) \stackrel{T}{\leftrightarrow} |G(m)|^2$ og $R_g(k) \stackrel{N}{\leftrightarrow} |G(m)|^2$. Har det analoge signal $h(t)$ spektrale komponenter ved de samme frekvenser som $g(t)$, vil der om krydskorrelationsfunktionen $R_{gh}(\tau)$ gælde, at den har samme form som $h(t)$. Dette ses umiddelbart af, at

$$S_{gh}(m) = H(m)G^*(m) = k_x H(m) \quad (5.149)$$

hvor k_x er den konstante og reelle værdi af $g(t)$'s spektrale komponenter.

5.6.7 Autokorrelationsfunktion for periodisk firkantsignal

Autokorrelationsfunktionen for det periodiske signal

$$g(t) = \begin{cases} a & |t| < \frac{1}{2}\theta \\ 0 & \frac{1}{2}\theta < |t| < \frac{1}{2}T \end{cases} \quad (5.150)$$

hvor konstanten $\theta < \frac{1}{2}T$, kan for positive τ -værdier beregnes af

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}\theta}^{\frac{1}{2}\theta - \tau} a^2 dt = a^2 \theta (1 - \tau/\theta) / T \quad (5.151)$$

se figur 5.8, således at man for enhver værdi af τ får

$$R_g(\tau) = a^2 \frac{\theta}{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{\theta} \right), \quad |\tau| < \theta \quad (5.152)$$

For det digitale signal

$$g(n) = \begin{cases} a & 0 \leq n \leq N_0 - 1 \\ 0 & N_0 \leq n \leq N - 1 \end{cases} \quad (5.153)$$

hvor konstanten $N_0 < \frac{1}{2}N$, vil man for positive k -værdier få summen

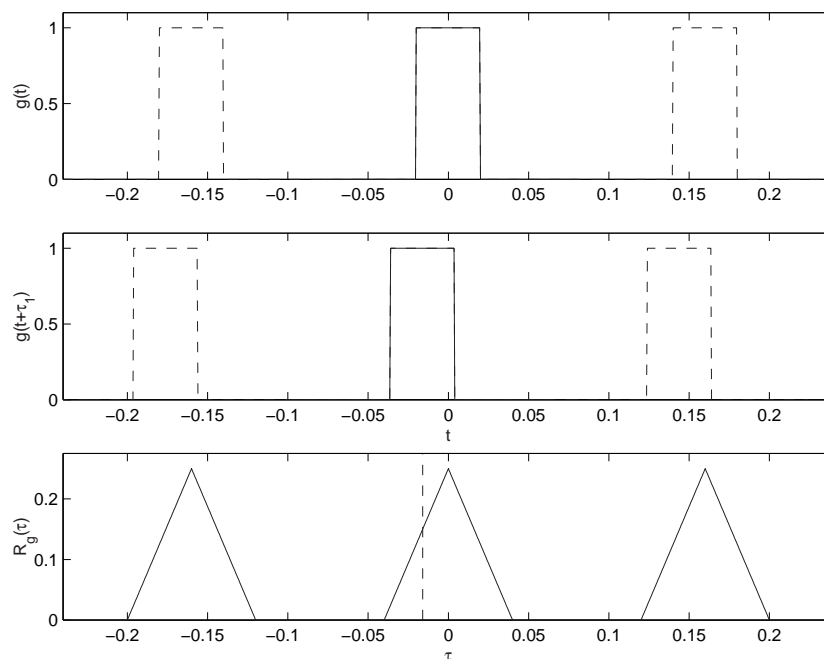
$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N_0-1-k} a^2 = \frac{N_0 - k}{N} a^2 \quad (5.154)$$

og dermed vil

$$R_g(k) = a^2 \frac{N_0}{N} \left(1 - \frac{|k|}{N_0} \right), \quad |k| < N_0 \quad (5.155)$$

Disse resultater ville naturligvis også kunne fås, dersom man beregnede effektspektret for firkantsignalerne (se f.eks. ka.p 2.3.2) og derpå fouriertransformerede dette spektrum.

Signaler, hvor $\frac{1}{2}T < \theta < T$ og $\frac{1}{2}N \leq N_0 < N$ har autokorrelationsfunktioner, som enklest findes, hvis man betragter $g(t)$ og $g(n)$ som en sum af et DC-signal og et periodisk firkantsignal med $\theta < \frac{1}{2}T$ og $N_0 < \frac{1}{2}N$, hvor a er negativ.



Figur 5.8: Autokorrelationsfunktionen for en periodisk firkantsignal. Signalernes placering på tidsaksen for bestemmelse af $R_g(\tau_1)$, indikeret ved den stiplede linie, er vist.

5.6.8 Spektrumbestemmelse ved krydskorrelation

Krydskorrelationsfunktionen mellem et periodisk signal $g(t)$ og en ren tone giver mulighed for at bestemme $g(t)$'s spektrum ved den rene tones frekvens. Er $g(t) \xleftrightarrow{T} G(m) = G_R(m) + jG_I(m)$, og lader man den rene tone have formen $\cos 2\pi m_0 t/T$, vil

$$R_{gc}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} g(t) \cos(2\pi m_0(t + \tau)/T) dt \quad (5.156)$$

Dette udtryk lader sig let omregne til

$$\begin{aligned} R_{gc}(\tau) &= \cos 2\pi m_0 \tau / T \cdot \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} g(t) \cos 2\pi m_0 t / T dt \\ &\quad - \sin 2\pi m_0 \tau / T \cdot \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} g(t) \sin 2\pi m_0 t / T dt \\ &= G_R(m_0) \cos 2\pi m_0 \tau / T + G_I(m_0) \sin 2\pi m_0 \tau / T \end{aligned} \quad (5.157)$$

Heraf ses det umiddelbart, at

$$R_{gc}(0) = G_R(m_0) \quad \text{og} \quad R_{gc}\left(\frac{T}{4m_0}\right) = G_I(m_0) \quad (5.158)$$

Tilsvarende regninger er mulige for digitale signaler.

5.7 Lineær og ikke-lineær bearbejdning af stokastiske signaler

Ligesom ved periodiske signaler er den vigtigste form for lineær signalbearbejdning, som har interesse i forbindelse med stokastiske signaler, filtrering med tidsinvariante filtre. Som følge af, at der

ved stokastiske signaler er signalets autokorrelationsfunktion, der har betydning for signalets spektrale opførsel, får omtalen af denne form for lineær signalbearbejdning et lidt andet indhold end tilfældet er for de øvrige signaltyper.

Hvad ikke-lineær signalbehandling angår, findes der ikke for tiden nogen generel fremgangsmåde til bestemmelse af alle resultatsignalets karakteristika. På dette punkt er det navnlig ikke-lineære systemer med "hukommelse"²⁰, som volder de største vanskeligheder. Sådanne systemer vil derfor ikke blive behandlet her, ligesom der kun vil blive omtalt et par - i praksis meget anvendte - systemer uden "hukommelse".

5.7.1 Filtrering af stokastiske signaler

I mangfoldige tekniske anvendelser forekommer der filtrering af stokastiske signaler med sædvanlige filtre med impulssvaret $h(t)$ eller $h(n)$ og overføringsfunktionen $H(f)$, hvor

$$h(t) \longleftrightarrow H(f) \quad \text{og} \quad h(n) \xleftrightarrow{\Delta T} H(f) . \quad (5.159)$$

Ud fra en stokastisk synsvinkel er dette ensbetydende med, at der til ethvert af de udfald, som det forelagte eksperiment har, knyttes et nyt signal $y_q(t)$ eller $y_q(n)$ gennem vedtægten

$$y_q(t) = h(t) * x_q(t) \quad \text{eller} \quad y_q(n) = h(n) * x_q(n) , \quad (5.160)$$

hvor $x_q(t)$ eller $x_q(n)$ er indgangssignal til filtret. Udgangssignalet fra filtret kan altså også betragtes som en stokastisk proces $Y(t)$ eller $Y(n)$, og det er denne stokastiske proces's egenskaber, som ønskes fastlagt ud fra kendskabet til den stokastiske proces $X(t)$ eller $X(n)$ på filtrets indgangsside og filtrets karakteristika.

Det er muligt at vise, at såfremt indgangssignalet til filtret er strengt stationært, vil det samme gælde udgangssignalet fra filtret. Derimod er en stationaritet på k 'te orden på indgangssiden ikke nødvendigvis nok til at sikre samme ordens stationaritet på udgangssiden af filtret.

Hvad sandsynlighedstæthedsfunktionen for signalet på filtrets udgang angår, findes der ingen almenyldig beregningsmetode, som kan benyttes. Det er dog muligt at vise²¹, at såfremt "varigheden" af filtrets impulssvar er stor sammenlignet med "varigheden" af indgangssignalets autokorrelationsfunktion, hvor det løse udtryk "varighed" f.eks. kunne betyde RMS-varighed, vil udgangssignalets sandsynlighedstæthedsfunktioner nærme sig til at blive normale (gaussiske) uanset indgangssignalets sandsynlighedstæthedsfunktioners form.

Det er umiddelbart indlysende, at filtrering af et stokastisk signals forventede værdi (DC) i det analoge tilfælde vil foregå efter udtrykket.

$$E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta) E\{X(t - \Theta)\} d\Theta = E\{X(t)\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta) d\Theta = E\{X(t)\} \cdot H(0) , \quad (5.161)$$

og tilsvarende for det digitale tilfælde

$$E\{Y(n)\} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} h(q) E\{X(n - q)\} = E\{X(n)\} H(0) . \quad (5.162)$$

Autokorrelationsfunktionen for udgangssignalet fra filtret kan for analoge stokastiske signaler beregnes på følgende måde.

²⁰Dette udtryk betyder, at systemets ikke-lineære karakteristika afhænger af systemets fortid d.v.s. af det signal, der indtil det betragtede tidspunkt har påvirket systemet.

²¹Se f.eks. R.A. Altshuler: Wide Band Systems and Gaussianity, IEEE Transactions on Information Theory, IT-21, november 1975, side 679-82.

Idet

$$Y(t) = h(t) * X(t) \quad (5.163)$$

og

$$Y(t + \tau) = h(t) * X(t + \tau) \quad , \quad (5.164)$$

finder man let

$$Y(t)Y(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta)X(t - \Theta) \cdot h(\sigma) \cdot X(t + \tau - \sigma)d\Theta d\sigma \quad , \quad (5.165)$$

hvorefter

$$R_Y(\tau) = E\{Y(t)Y(t + \tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta)h(\sigma)R_X(\tau - \sigma + \Theta)d\Theta d\sigma \quad . \quad (5.166)$$

Indføres i dette udtryk variabeltransformationen $\gamma = \sigma - \Theta$, fås

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau - \gamma) \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta)h(\sigma + \gamma)d\Theta d\gamma \quad . \quad (5.167)$$

Som nævnt i afsnit 5.5, er det inderste af de to integraler autokorrelationsfunktionen $R_h(\gamma)$ for det givne filter. Dette betyder altså, at

$$R_Y(\tau) = R_h(\tau) * R_X(\tau) \quad . \quad (5.168)$$

Eftersom

$$R_h(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) \leftrightarrow H^*(f)H(f) \quad , \quad (5.169)$$

vil det altså i frekvensdomænet gælde, at

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) \quad . \quad (5.170)$$

De viste beregninger kan også gennemføres for digitale signaler og giver tilsvarende resultater.

Krydskorrelationsfunktionen $R_{XY}(\tau)$ mellem indgangssignal til og udgangssignal fra filtret kan beregnes ud fra

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= E\{X(t)Y(t + \tau)\} = E\{X(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta)X(t + \tau - \Theta)d\Theta\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta)R_X(\tau - \Theta)d\Theta = h(\tau) * R_X(\tau) \quad . \end{aligned} \quad (5.171)$$

Denne relation mellem $R_X(\tau)$, $R_{XY}(\tau)$ og $h(\tau)$ benyttes i praksis til at bestemme $h(\tau)$ og dermed $H(f)$ for filtre.

I frekvensdomænet er resultatet ensbetydende med

$$S_{XY}(f) = H(f)S_X(f) \quad . \quad (5.172)$$

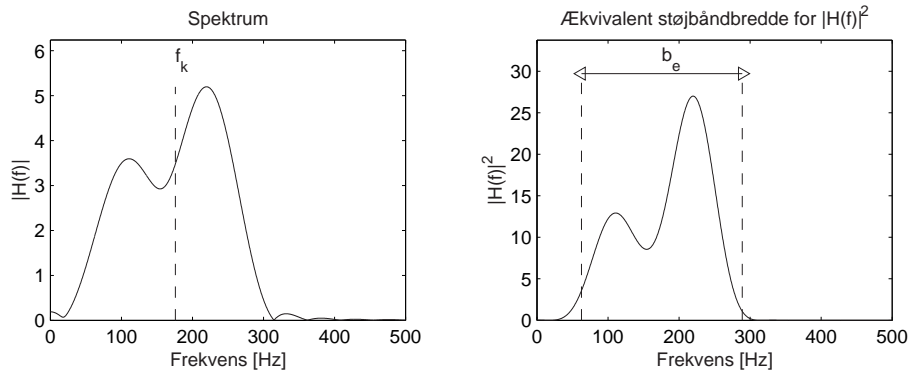
Beregningerne kan også gennemføres for digitale signaler med tilsvarende resultater.

Udgangssignalet effekt P_Y kan naturligvis findes på flere måder. For analoge signaler vil

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)R_h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_X(f)df \quad , \quad (5.173)$$

medens de tilsvarende udtryk for digitale signaler er

$$P_Y = \sum_{q=-\infty}^{\infty} R_X(q)R_h(q) = \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} |H(f)|^2 S_X(f)df \quad . \quad (5.174)$$



Figur 5.9: Definition af ækvivalent støjbåndbredde for filter. f_k er her valgt til middelfrekvensen for spektret.

Eftersom $P_Y \geq 0$ for ethvert filter, vil det medføre, at et vilkårligt stokastisk signals effektspektrum aldrig kan antage negative værdier, altså

$$S(f) \geq 0 \quad . \quad (5.175)$$

I forbindelse med filtre benytter man ofte begrebet ækvivalent støjbredde B_e , som defineres ved

$$B_e = \int_0^\infty \frac{|H(f)|^2}{|H(f_k)|^2} df \quad \text{og} \quad B_e = \int_0^{f_g} \frac{|H(f)|^2}{|H(f_k)|^2} df \quad (5.176)$$

for henholdsvis analoge og digitale signaler, hvor f_k er en eller anden karakteristisk frekvens for filtret, f.eks. $f = 0$, centerfrekvensen eller den frekvens, hvor $|H(f)|$ er størst mulig. Selvom det ikke fremgår af notationen, er B_e en funktion af såvel $|H(f_k)|$ som af f_k .

5.7.2 Hvid og farvet støj

Med udtrykket hvid støj menes støj, hvis effekttæthedsspektrum er konstant ved alle frekvenser, d.v.s.

$$S_Y(f) = A \quad , \quad (5.177)$$

hvor A er konstant.

Autokorrelationsfunktionen for denne støj bliver da for analoge signaler

$$R_Y(\tau) = A \cdot \delta(\tau) \quad . \quad (5.178)$$

Det ses umiddelbart, at signalets effekt er uendelig, hvorfor man af fysiske grunde ikke kan realisere et sådant signal. Signalet har dog visse teoretiske anvendelser (se senere).

Et digitalt hvidstøjsignals autokorrelationsfunktion er, som det let ses

$$R_Y(k) = A\delta(k) \quad , \quad (5.179)$$

og for dette signal er $P_Y = A$. Et sådant signal kan realiseres og benyttes ofte i digital signalbehandling.

Båndbegrænset hvid støj fremkommer, dersom man filtrerer hvid støj med et passende filter med overføringsfunktionen $H(f)$ ²². For dette signal vil det gælde, at

$$S_X(f) = |H(f)|^2 A \quad . \quad (5.180)$$

²²I daglig tale er der i betegnelsen båndbegrænset hvid støj underforstået, at det nævnte filter har så konstant værdi af $|H(f)|$ i gennemgangsområdet som muligt således, at støjen er "hvid" inden for dette frekvensområde.

Autokorrelationsfunktionen for signalet bliver da

$$R_X(\tau) = AR_h(\tau) \quad . \quad (5.181)$$

Af udtrykket

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df = A \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 d(f) \quad (5.182)$$

som gælder analoge støjsignaler, får man straks

$$P_X = A |H(f_k)|^2 B_e = 2B_e S_X(f_k) \quad , \quad (5.183)$$

hvor B_e er filtrets ækvivalente støjbåndbredde beregnet ud fra den karakteristiske frekvens f_k (se kap. 5.7.1).

Heraf fremgår det, at B_e kan opfattes som båndbredden - ved positive frekvenser - af det båndbegrænsede hvidstøjsignal med effekttætheden $S_X(f_k)$, som har samme effekt som det oprindelige signal.

For digitale signaler forløber regningerne på tilsvarende måde således, at resultatet her bliver

$$P_X = \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} S_X(f) df = \frac{B_e}{f_g} S_X(f_k) \quad . \quad (5.184)$$

Bemærk, at den ækvivalente støjbåndbredde her ses i relation til $f_g = (2\Delta T)^{-1}$, se også kap. 5.3.2).

Betegnelsen "lyserød støj" benyttes om støj, hvis spektrum har formen

$$S_X(f) = \frac{A}{|f|} \quad , \quad (5.185)$$

hvor A er en konstant. Det er umiddelbart indlysende, at P_X i dette tilfælde også er uendelig stor, hvorfor de i praksis forekommende lyserøde signaler er båndbegrænsede såvel ved lave som ved høje frekvenser. Spektret for båndbegrænset lyserød støj kan da være givet ved

$$S_X(f) = \begin{cases} \frac{A}{|f|} & \text{for } f_n < |f| < f_\emptyset \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (5.186)$$

og dette signals effekt lader sig udregne til

$$P_X = 2A \ln \frac{f_\emptyset}{f_n} \quad . \quad (5.187)$$

5.7.3 Smalbåndsstøj

Betegnelsen smalbåndsstøj benyttes om et signal $V(t)$, hvis effekttæthedsspektrum kun er forskelligt fra 0 inden for et snævert frekvensbånd af bredden B placeret ved frekvensen f_0 . Det vil normalt være sådan, at $B \ll f_0$.

Et smalbåndssignal optræder i praksis f.eks., når man skal bestemme et stokastisk signals spektrum ved hjælp af et båndpasfilter.

På lignende måde, som det er tilfældet ved smalbåndssignaler med endelig energi, er det bekvemt at betragte $V(t)$, som er en sum af to stokastiske signaler $X(t)$ og $Y(t)$

$$V(t) = X(t) \cos 2\pi f_0 t + Y(t) \sin 2\pi f_0 t \quad . \quad (5.188)$$

Da tiden t også indgår i de trigonometriske faktorer, er det ikke indlysende, at $V(t)$ er stationær, selv om $X(t)$ og $Y(t)$ er det.

Betingelsen for, at $V(t)$ er svagt stationær er, at den forventede værdi og autokorrelationsfunktionen af $V(t)$ er uafhængig af tidens nulpunkt (jf. kap. 5.2.1). Dette betyder da

$$E\{V(t)\} = E\{X(t)\} \cos 2\pi f_0 t + E\{Y(t)\} \sin 2\pi f_0 t \quad , \quad (5.189)$$

at

$$E\{X(t)\} = 0 \quad \text{og} \quad E\{Y(t)\} = 0 \quad . \quad (5.190)$$

Af udtrykket

$$\begin{aligned} R_V(\tau) &= E\{(X(t) \cos 2\pi f_0 t + Y(t) \sin 2\pi f_0 t)(X(t + \tau) \cos 2\pi f_0(t + \tau) \\ &\quad + Y(t + \tau) \sin 2\pi f_0(t + \tau))\} \\ &= \frac{1}{2}(R_X(\tau) + R_Y(\tau)) \cos 2\pi f_0 \tau - \frac{1}{2}(R_{YX}(\tau) - R_{XY}(\tau)) \sin 2\pi f_0 \tau \\ &\quad + \frac{1}{2}(R_X(\tau) - R_Y(\tau)) \cos 2\pi f_0(2t + \tau) + \frac{1}{2}(R_{YX}(\tau) + R_{XY}(\tau)) \sin 2\pi f_0(2t + \tau) \quad , \end{aligned} \quad (5.191)$$

ses det straks, at såfremt

$$R_X(\tau) = R_Y(\tau) \quad \text{og} \quad R_{XY}(\tau) = -R_{YX}(\tau) \quad , \quad (5.192)$$

vil $V(t)$ være svagt stationær, og det vil gælde, at

$$R_V(\tau) = R_X(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau - R_{YX}(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau \quad . \quad (5.193)$$

Det er heraf klart, at spektret for de to stokastiske signaler $X(t)$ og $Y(t)$ vil være koncentreret i en omegn af $f = 0$ og med en båndbredde af størrelsesordenen $\frac{1}{2}B$.

Danner man nu to ny stokastiske signaler

$$A(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)} \quad \psi(t) = \arctan\left(-\frac{Y(t)}{X(t)}\right) \quad (5.194)$$

af signalerne $X(t)$ og $Y(t)$, ses det, at man kan skrive $V(t)$ på formen

$$V(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \psi(t)) \quad . \quad (5.195)$$

Også signalerne $A(t)$ og $\psi(t)$ vil groft set være signaler med spektre, som er koncentreret nær $f = 0$.

Er signalerne $X(t)$ og $Y(t)$ begge uafhængige og gaussiske, vil de endimensionale sandsynlighedstæthedsfunktioner for de to signaler $A(t)$ og $\psi(t)$ være givet ved

$$w_A(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sigma^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha \leq 0 \end{cases} \quad (5.196)$$

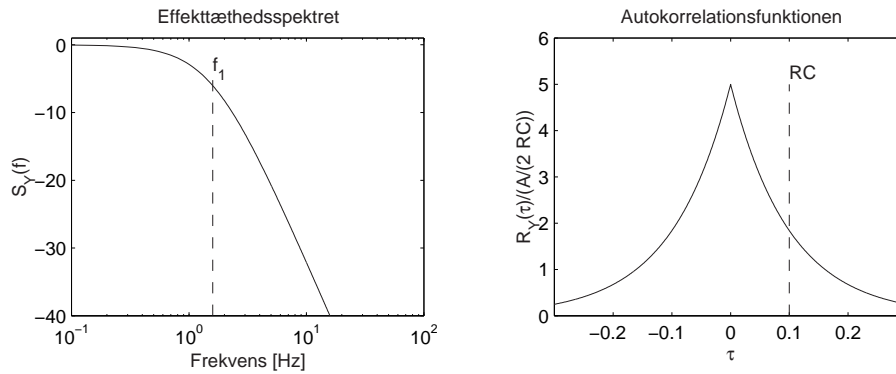
(Rayleigh fordelingen, se også tabel 5.1)

$$\sigma^2 = R_V(0) = P_V \quad , \quad (5.197)$$

og²³

$$w_\psi(\beta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \beta \leq 2\pi \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad . \quad (5.198)$$

²³Man kan vise, at $A(t)$ og $\psi(t)$ under disse omstændigheder er stokastisk uafhængige



Figur 5.10: Effekttæthedsspektret og autokorrelationsfunktionen for RC-lavpasfiltreret hvid støj.

$$E\{A(t)\} = \left(\frac{1}{2}\pi\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.199)$$

og

$$\sigma^2\{A(t)\} = \left(2 - \frac{1}{2}\pi\right)\sigma^2 \quad , \quad (5.200)$$

samt, at

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau \quad . \quad (5.201)$$

5.7.4 RC-lavpasfiltreret hvid støj

Er $X(t)$ et analogt hvidstøjssignal med effekttæthedsspektret $S_X(f) = A$, hvor A er en konstant, og lader man filtret være et RC-lavpasfilter med overføringsfunktionen

$$H_1(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \quad (5.202)$$

vil man altså for udgangssignalet $Y(t)$ fra filtret få spektret

$$S_Y(f) = A |H_1(f)|^2 = \frac{A}{1 + \left[\frac{f}{f_1}\right]^2} \quad , \quad (5.203)$$

hvor $f_1 = (2\pi RC)^{-1}$.

Autokorrelationsfunktionen findes ved fouriertransformation af $S_Y(f)$ til

$$R_Y(\tau) = \frac{A}{2RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}} \quad (5.204)$$

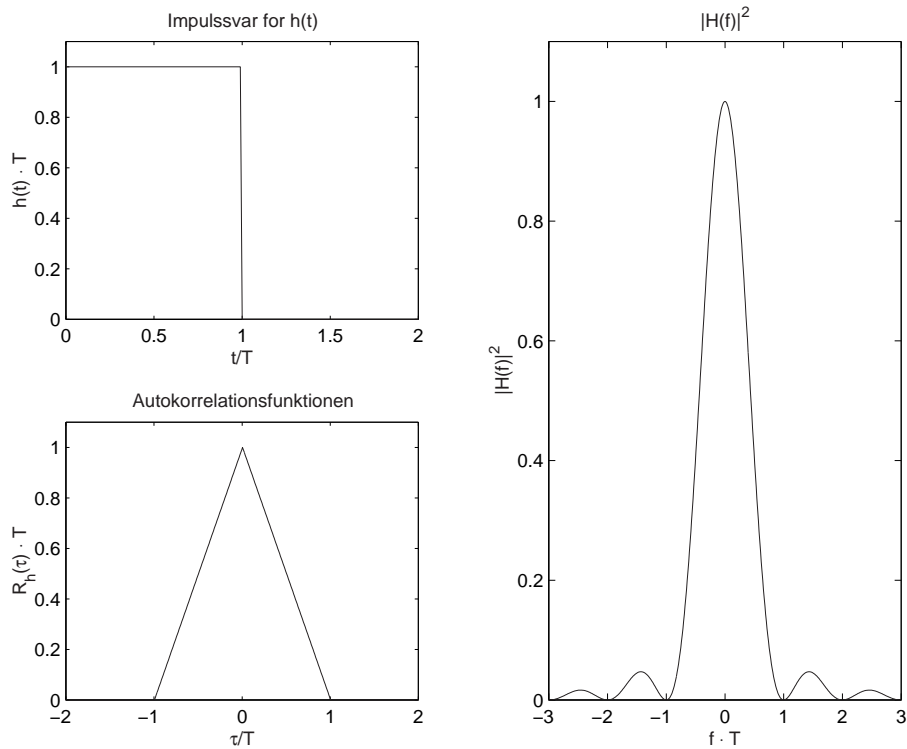
(se figur 5.10). Signalets samlede effekt bliver da

$$P_Y = \frac{A}{2RC} \quad . \quad (5.205)$$

5.7.5 Integreret stokastisk signal

Ved visse anvendelser (f.eks. bestemmelse af et signals effekt) får man brug for at danne signalet

$$Y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(\theta) d\theta \quad , \quad (5.206)$$



Figur 5.11: Impulssvar, autokorrelationsfunktion og spektrum for integrator.

af det analoge signal $X(t)$.

Da integrationen over tidsrummet T er ækvivalent med en lavpasfiltrering, kan $Y(t)$ betragtes som udgangssignalet fra dette filter, når $X(t)$ er indgangssignal til filtret. Af dette følger umiddelbart, at

$$E\{Y(t)\} = E\{X(t)\} \quad . \quad (5.207)$$

Af formen af impulsvaret $h(t)$ for integratoren (se fig. 5.11) fremgår det, at

$$R_h(\tau) = \begin{cases} (1 - |\tau|/T)/T & |\tau| < T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases} \quad (5.208)$$

hvorefter

$$R_Y(\tau) = R_h(\tau) * R_X(\tau) \quad . \quad (5.209)$$

Er $X(t)$ et hvidstøjsignal med den konstante effekttæthed A , bliver

$$R_Y(\tau) = AR_h(\tau) \quad (5.210)$$

og

$$S_Y(f) = A \frac{\sin^2 \pi f T}{(\pi f T)^2} \quad . \quad (5.211)$$

Effekten i signalet $Y(t)$ bliver

$$P_Y = A/T \quad . \quad (5.212)$$

Drejer det sig om et digitalt støjsignal $X(n)$, som filtreres med den digitale integrator, bliver udgangssignalet $Y(n)$ givet ved

$$Y(n) = \frac{1}{N} \sum_{q=n-(N-1)}^n X(q) \quad . \quad (5.213)$$

Det findes umiddelbart, at

$$R_h(k) = \begin{cases} \left(1 - \frac{k}{N}\right)/N & |k| < N \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} . \quad (5.214)$$

Er $R_X(k) = A\delta(k)$, bliver $S_X(f) = A$, og dermed vil

$$S_Y(f) = A \left[\frac{1}{N} \cdot \frac{\sin \pi f N \Delta T}{\sin \pi f \Delta T} \right]^2 \quad (5.215)$$

Udgangssignalets samlede effekt findes let til

$$P_Y = A/N . \quad (5.216)$$

5.7.6 Den kvadratiske ensretter

Dette ikke-lineære system finder bl.a. anvendelse ved måling af et stokastisk signals effekt. Sammenhængen mellem indgangsstørrelsen x og udgangsstørrelsen y fra systemet er

$$y = ax^2 , \quad (5.217)$$

hvor a er en konstant.

Lader man $X(t)$ være det analoge indgangssignal til det ulineære system og $Y(t)$ det hertil svarende udgangssignal, fås umiddelbart

$$E\{Y(t)\} = aE\{X^2(t)\} = aP_X . \quad (5.218)$$

$Y(t)$ har altså en DC-komponent, hvis størrelse angiver $X(t)$'s totale effekt.

Benyttes resultaterne fra kap. 5.1.2 finder man, idet

$$x = \pm \sqrt{y/a} , \quad (5.219)$$

at

$$w_Y(\eta) = \begin{cases} \frac{w_X(-\sqrt{\eta/a}) + w_X(\sqrt{\eta/a})}{2\sqrt{a\eta}} & \eta \geq 0 \\ 0 & \eta < 0 \end{cases} \quad (5.220)$$

I det følgende sættes $a = 1$ for enkelheds skyld.

Såfremt $X(t)$ er et gaussisk støjsignal med $E\{X(t)\} = 0$, er

$$w_X(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot R_X(0)}} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2R_X(0)}} , \quad (5.221)$$

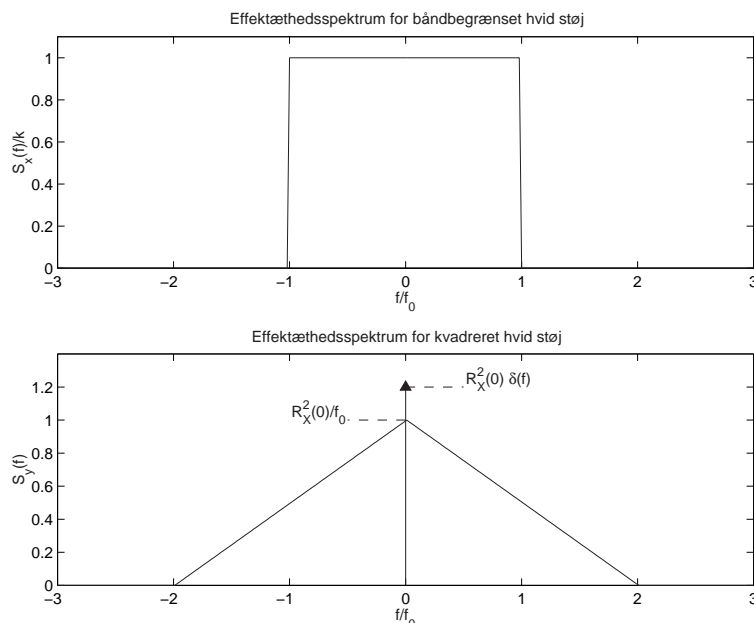
og derfor bliver

$$w_Y(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot e^{-\frac{\eta}{2R_X(0)}} & \eta > 0 \\ 0 & \eta < 0 \end{cases} . \quad (5.222)$$

Denne tæthedsfunktion er afbildet på fig. 5.3.

Autokorrelationsfunktionen $R_Y(\tau)$ for udgangssignalet $Y(t)$ kan findes af

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E\{Y(t)Y(t+\tau)\} \\ &= E\{X^2(t)X^2(t+\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1^2 \xi_2^2 w_X(\xi_1, \xi_2; \tau) d\xi_1 d\xi_2 , \end{aligned} \quad (5.223)$$



Figur 5.12: Effektæthedsspektret for båndbegrænset, hvid støj og kvadreret, båndbegrænset hvid støj.

hvor $w_X(\xi_1, \xi_2; \tau)$ er som anført i kap. 5.2.3. Indfører man i dette udtryk den ny variable $\eta = \xi_2 - \xi_1 R_X(\tau)/R_X(0)$, kan w_X opspaltes i produktet af to sandsynlighedstæthedsfunktioner for henholdsvis ξ_1 og η . Dette kan sammen med oplysninger om, at $E\{X(t)\} = 0$ og $E\{X^4(t)\} = 3R_X^2(0)$, og nogen tids regninger føre til, at²⁴

$$R_Y(\tau) = R_X^2(0) + 2R_X^2(\tau) \quad . \quad (5.224)$$

Heraf ses det tydeligt, at $Y(t)$ har den DC-komponent, som er omtalt ovenfor, samt at spektret for $Y(t)$ bliver

$$S_Y(f) = R_X^2(0)\delta(f) + 2S_X(f) * S_X(f) \quad . \quad (5.225)$$

På fig. 5.12 er som eksempel vist spektret $Y(t)$, når $X(t)$ er båndbegrænset hvid støj (ideelt filter).

Det bemærkes, at den kontinuerte del af $S_Y(f)$ altid vil være $\neq 0$ i området omkring $f = 0$, uanset hvorledes $S_X(f)$ ser ud.

Ved måling af et signals totale effekt (eller dets RMS-værdi) har det også betydning at kende AC-effekten for signalet $Y(t)$. Denne AC-effekt bliver

$$P_{AC} = 2R_X^2(0) \quad , \quad (5.226)$$

som det kan beregnes ud fra enten udtrykket for $w_Y(\eta)$ udtrykket for $R(\tau)$ eller udtrykket for $S_Y(f)$.

5.7.7 Den lineære dobbeltensretter

Den ulineære karakteristik har i dette tilfælde formen

$$y = a | x | \quad , \quad (5.227)$$

hvor bogstaverne har samme betydning som anført i kap. 5.7.6.

²⁴Dette udtryk kan også fremkomme af identiteten $E\{X_1(t)X_2(t)X_3(t)X_4(t)\} = E\{X_1(t)X_2(t)\}E\{X_3(t)X_4(t)\} + E\{X_1(t)X_3(t)\}E\{X_2(t)X_4(t)\} + E\{X_1(t)X_4(t)\}E\{X_2(t)X_3(t)\}$, som gælder 4 signaler med simultan gaussisk tæthedsfunktion (4-dimensional).

Lader man også her $X(t)$ være det analoge indgangssignal til og $Y(t)$ udgangssignal fra ensretteren, bliver sandsynlighedstæthedsfunktionen

$$w_Y(\eta) = \begin{cases} \frac{w_X(-\eta/a) + w_X(\eta/a)}{a} & \eta \geq 0 \\ 0 & \eta < 0 \end{cases} . \quad (5.228)$$

(jævnfør kap. 5.1.2).

Med $a = 1$ og dersom $X(t)$ er *gaussisk*, bliver

$$w_Y(\eta) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2R_X(0)}} & \eta \geq 0 \\ 0 & \eta < 0 \end{cases} . \quad (5.229)$$

Heraf fås

$$E\{Y(t)\} = \int_0^\infty \eta \cdot w_Y(\eta) d\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot R_X(0) . \quad (5.230)$$

Denne middelværdi (DC-værdi) er altså proportional med $\sqrt{P_X}$.

Det kan vises, at man under de givne forudsætninger kan skrive

$$R_Y(\tau) = \frac{2}{\pi} R_X(0) + \frac{1}{\pi} \frac{R_X^2(\tau)}{R_X(0)} + \frac{1}{12\pi} \frac{R_X^4(\tau)}{R_X^3(0)} + \dots . \quad (5.231)$$

Effektæthedsspektret for $Y(t)$ fås ved ledvis fouriertransformation af udtrykket $R_Y(\tau)$. Også dette spektrum har en DC-komponent og AC-komponenter i området omkring DC-komponenten (nær $f = 0$).

AC-effekten i $Y(t)$ kan beregnes til

$$P_{AC} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) R_X(0) . \quad (5.232)$$

Beregninger på digitale signaler

Et digitalt signals værdier kunne repræsenteres ved tal med et endeligt antal cifre (med ”endelig præcision”). Dette krav er en naturlig følge af, at digital signalbehandling sædvanligvis foretages med materiel, som har en endelig registerlængde. Hvilken betydning, det får for de udførte beregningers nøjagtighed, afhænger bl.a. af, hvilke talformater der benyttes, samt af hvorledes beregningerne organiseres. Da det ofte er af stor betydning inden for digital signalbehandling, at beregninger foregår hurtigt, medens kravet om slutresultatets nøjagtighed ofte ikke er særligt stort, vil det næsten altid kunne betale sig at planlægge beregningsgangen og fordelingen af det til rådighed værende antal cifre nøje.

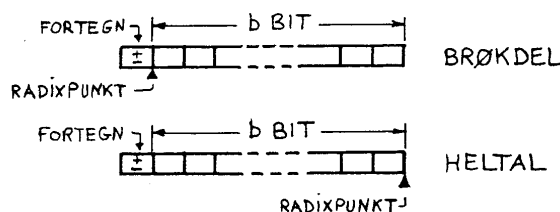
6.1 Talformater og aritmetriske operationer

Næsten al digital signalbehandling foregår i det binære talsystem. Når der kun er få bit til rådighed til at repræsentere det digitale signals værdier, benyttes ofte 2's komplement notation. De to mest almindelige metoder at fortolke et bit-mønster på under disse omstændigheder er vist på figur 6.1.

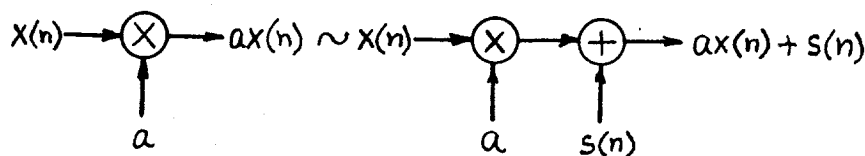
Ved digital signalbehandling benyttes i overvejende grad multiplikationer og additioner. For begge disse operationer gælder det, at antallet af bit i repræsentationen for resultatet er større end det antal bit, de enkelte operander er repræsenteret med (ved addition $b + 1$ bit, ved multiplikation $2b$ bit). Medens man altid vil kunne risikere overløb ved addition, får man kun overløb ved multiplikation, når der benyttes heltalsrepræsentation.

Dette er begrundelsen for en vis forkærlighed for anvendelse af brøkdelsrepræsentationen. Da additionsoverløb kan forhindres ved en passende skalering, d.v.s. en multiplikation med 2^{-1} før additionen, er det almindelig kutyme at regne med, at additioner kan foretages korrekt, således at alle fejlkilder optræder ved signalbehandlingens multiplikationer.

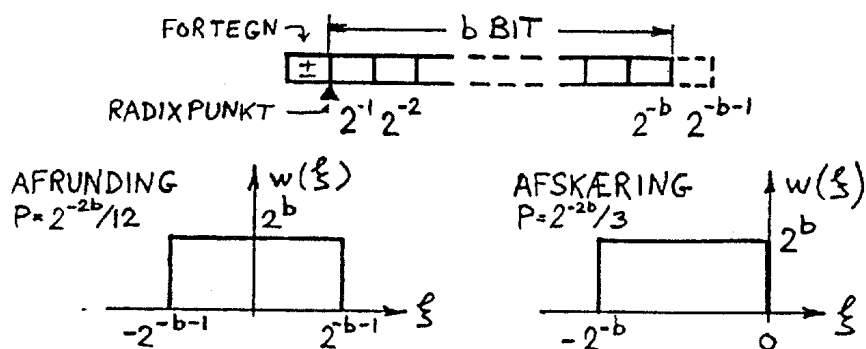
Multiplikationsresultater skal altså afkortes til b bit, og dette kan ske enten ved en afrunding eller ved en



Figur 6.1: Format for brøkdæl og for heltal.



Figur 6.2: Model for kvantisering af resultat efter multiplikation.



Figur 6.3: Sandsynlighedstæthedfunktionerne for afrunding og afskæring af resultatet efter multiplikation.

afskæring¹. I begge tilfælde er der tale om en ikke-lineær modifikation af det digitale signals værdier. Virkningen af disse modifikationer er ikke let at udtrykke nøjagtigt. Der benyttes derfor en stokastisk signalmodel, som i høj grad minder om den, der anvendes ved omsætning fra analogt til digitalt signal omtalt i afsnit 6.2.

Til hver multiplikation, som udføres på den ovenfor omtalte unøjagtige måde, associeres et lille stokastisk signal $s(n)$, hvis signalværdier er forskellen mellem det korrekte resultat af multiplikationen og det afkortede resultat, som benyttes i de videre regninger (se figur 6.2).

Om signalet $s(n)$ antages det sædvanligvis

1. at $s(n)$ er stokastisk uafhængig af såvel signalet $x(n)$ som af andre signaler, der opstår som følge af anden signalbehandling.
2. at sandsynlighedstæthedsfunktionen $w_s(\xi)$ for $s(n)$ er rektangulær, hvor ξ ligger i et interval af bredden 2^{-b} , hvis beliggenhed er afhængig af, om bitafkortningen sker ved afskæring eller afrunding, se figur 6.3, samt
3. at effektspektret $S_s(f)$ for $s(n)$ er hvidt, altså

$$S_s(f) = 2^{-2b}/12$$

suppleret med en DC-komponent af størrelsen -2^{-b-1} , når der benyttes afskæring.

Forudsætningen 1) er ensbetydende med, at støjens AC-effekt på et givet sted i en digital signalbehandling kan beregnes som summen af de enkelte delsignalers AC-effekt henført til det nævnte sted.

¹Som bekendt er afskæring bortkastning af de overskydende cifre, hvorimod afrunding indebærer, at der til det korrekte multiplikationsresultat adderes et tal svarende til halvdelen af det mindst betydende bit i slutresultatet, hvorefter der afskæres.

Hvad eventuelle DC-komponenter (hidrørende fra afskæring) angår, er de naturligvis helt korrelerede, og DC-effekten på et givet sted skal derfor beregnes på den måde, at DC-værdien først beregnes ved en summation af de enkelte DC-komponenter henført til det nævnte sted og derpå omsættes til en DC-effekt.

På baggrund af denne signalmodel er det værd at fremhæve, at den rækkefølge, en forelagt digital signalbehandlings deloperationer i udføres i, kan få en ikke uvæsentlig indflydelse på slutresultatets nøjagtighed og støjfrihed.

Et specielt problem frembyder konstanter, som indgår i den digitale signalbehandling, idet visse former for signalbehandling er meget følsomme for de uundgåelige unøjagtigheder, der følger af konstanternes repræsentation med et endeligt antal cifre. Også her gælder det, at man ved valg af en anden fremgangsmåde til at opnå den forlangte signalbehandling undertiden kan omgå vanskelighederne.

Som grov hovedregel kan man anføre, at jo færre additioner og multiplikationer en digital signalbehandling består af jo bedre vil den normalt være i støjmæssig henseende². Med hensyn til beregninger foretaget på signalværdier i flydendets repræsentation henvises til speciallitteraturen.

6.2 Kvantisering af samplede signaler

Når det analoge og båndbegrænsede signal $g_a(t)$ skal omsættes til det digitale signal $g(n)$, som repræsenteres ved hjælp af tal med endelig præcision, vil det ofte være således, at $g(n) \neq g_a(n\Delta T)$. Dette betyder, at $g(n)$ og $g_a(t)$ ikke kan være helt ækvivalente. Betragt man nu et tænkt analogt signal, $g_k(t)$, som er båndbegrænset, og hvorom det gælder, at $g_k(n\Delta T) = g(n)$, vil $g_k(t)$ og $g(n)$ være ækvivalente. For ethvert n kan man således skrive

$$g_k(n\Delta T) = g_a(n\Delta T) + g_e(n\Delta T), \quad (6.1)$$

hvor $g_e(n\Delta T)$ er forskellen mellem $g_k(n\Delta T)$ og $g_a(n\Delta T)$.

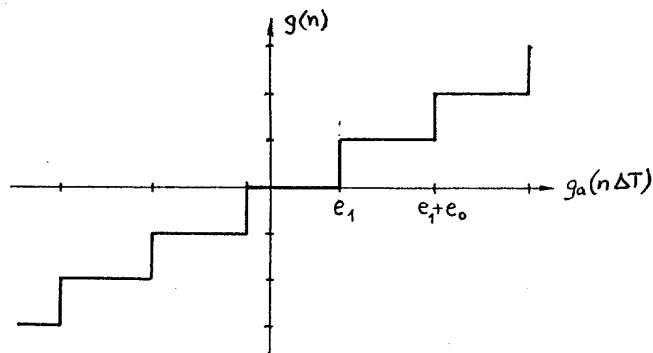
Man tænker sig nu, at $g_e(n\Delta T)$ stammer fra en sampling af et lille båndbegrænset analogt signal $g_e(t)$, som kaldes kvantiseringsstøj. Den digitale signalbehandling, som foretages på $g(n)$, svarer derfor til en signalbehandling udført både på $g_a(t)$ og på $g_e(t)$.

Er $g_a(t)$ et deterministisk signal, som er kendt, kan der korrigeres for afvigelserne, men denne situation er ikke særlig almindelig. Man antager derfor i reglen, at $g_a(t)$ er stokastisk, idet det derved bliver muligt at forudsige visse af fejlsignalet $g_e(t)$'s egenskaber.

6.2.1 Kvantiseringsstøjens egenskaber

Antagelsen om, at $g_e(t)$ er stokastisk, er naturlig, såfremt $g_a(t)$ også er stokastisk. De resultater, der opnås på denne måde, viser sig imidlertid også at have gyldighed for andre former for signaler, når blot det antal cifre, som det digitale signal repræsenteres ved, ikke er alt for lille. Af afgørende betydning for beskrivelsen af $g_e(t)$ er kvantiseringskarakteristikens form, dvs. sammenhængen mellem $g_a(n\Delta T)$ og $g(n)$. Den nævnte beskrivelse bliver enklest, når det antages, at alle karakteristikens trin har samme bredde, e_0 , dvs. at $g_a(t)$'s amplitudeområde deles op i lige store intervaller. Det er dog værd at bemærke, at denne forudsætning ofte ikke er opfyldt helt i praksis, enten fordi de elektroniske kredsløb, som udfører omsætningen, ikke er helt fejlfri, eller fordi man ved visse signaler - f.eks. tale - undertiden bevidst bruger varierende trin størrelse.

²I A. V. Oppenheim & R. W. Schaffer: Digital Signal Processing, 1975, kap. 9, prob. 2, anføres det, at hvis man ved addition af mange heltal på 2's komplement form på forhånd ved, at resultatet kan rummes inden for den givne registerlængde, spiller det ingen rolle, om der forekommer aritmetisk overløb undervejs i beregningerne.



Figur 6.4: Kvantiserings karakteristisk.

På figur 6.4 ses et eksempel på en sådan kvantiseringskarakteristik. Den værdi af $g_a(t)$, hvor $g(n)$ skifter fra værdien 0 til værdien³ 1, kaldes e_1 , og det ses umiddelbart, at

$$0 \leq e_1 \leq e_0 \quad (6.2)$$

Kvantiseringsstøjens sandsynlighedstæthedsfunktion

Antager man, at e_0 er lille i forhold til bredden af sandsynlighedstæthedsfunktionen $w_a(\xi)$ for $g_a(t)$, kan man med den i afsnit 6.2 anførte sammenhæng mellem $g_e(n\Delta T)$, $g_a(n\Delta T)$ og $g_k(n\Delta T)$ - og dermed med $g(n)$ - let finde, at sammenhængen mellem $g_a(n\Delta T)$ og $g_e(n\Delta T)$ bliver som vist øverst på figur 6.5. Da sammenhængen er stykkevis lineær, må man for at finde kvantiseringsstøjens sandsynlighedstæthedsfunktion $w_e(\eta)$ benytte den metode, der er omtalt i afsnit 5.1.2. I det interval, som indeholder $g_e(n\Delta T) = 0$, har man

$$g_e(n\Delta T) = -g_a(n\Delta T), \quad (6.3)$$

og følgelig gælder der her

$$\eta = \beta(\xi) = -\xi. \quad (6.4)$$

Bidraget fra $w_a(\xi)$ til $w_e(\eta)$ i dette interval fås altså som

$$w_e(n) = \frac{w_a(\gamma(\eta))}{|\beta'(\gamma(\eta))|} = w_a(-\eta), \quad (6.5)$$

hvor $\xi = \gamma(\eta)$ er den omvendte funktion svarende til $\eta = \beta(\xi)$. I det generelle tilfælde, når

$$e_1 + (q-1)e_0 \leq g_a(n\Delta T) \leq e_1 + qe_0, \quad (6.6)$$

hvor q er et helt tal, bliver

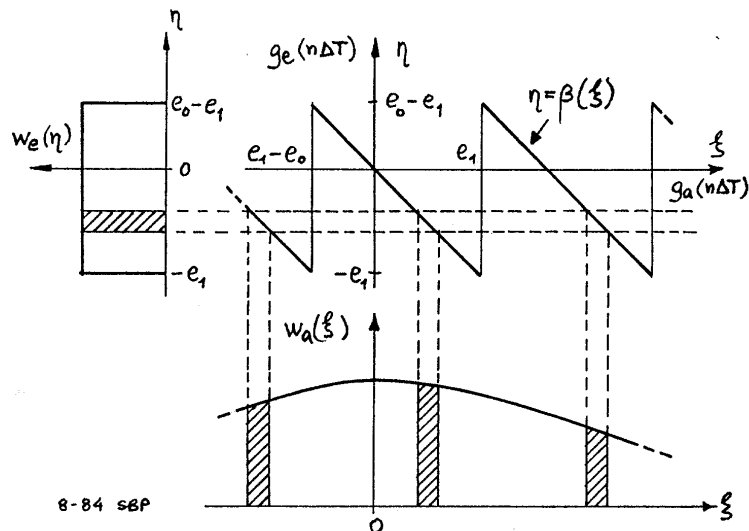
$$\eta = \beta(\xi) = -\xi + qe_0, \quad (6.7)$$

og resultatet bliver da

$$w_e(\eta) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} w_a(-\eta + qe_0), \quad (6.8)$$

hvor $-e_1 \leq \eta \leq e_0 - e_1$.

³eller svarende til den mindst betydende bit i talrepræsentationen for $g(n)$



Figur 6.5: Udregningen af sandsynlighedstæthedsfunktionen for kvantiseringsstøjen.

$w_e(\eta)$ er altså kun forskellig fra 0 i det nævnte interval, og den findes gennem en addition af forskudte dele af $w_a(\eta)$. Kan man forudsætte, at disse forskudte dele er meget ”smalle”, og at $w_a(\eta)$ er ”skikkelig” og symmetrisk om $\eta = 0$, vil $w_e(\eta)$ med god tilnærmelse blive rektangulær (se figur 6.6).

Det er herefter enkelt at beregne kvantiseringsstøjens middelværdi og effekt. Man får

$$E\{g_e(n\Delta T)\} = \int_{-e_1}^{e_0-e_1} \xi \frac{1}{e_0} d\xi = \frac{1}{2}e_0 - e_1 \quad (6.9)$$

og

$$E\{g_e^2(n\Delta T)\} = \int_{-e_1}^{e_0-e_1} \xi^2 \frac{1}{e_0} d\xi = \frac{e_0^2}{3} - e_0e_1 + e_1^2. \quad (6.10)$$

Bemærk, at disse størrelser er uafhængige af $g_a(t)$ under de opstillede forudsætninger, samt at de kun er funktioner af e_0 og e_1 .

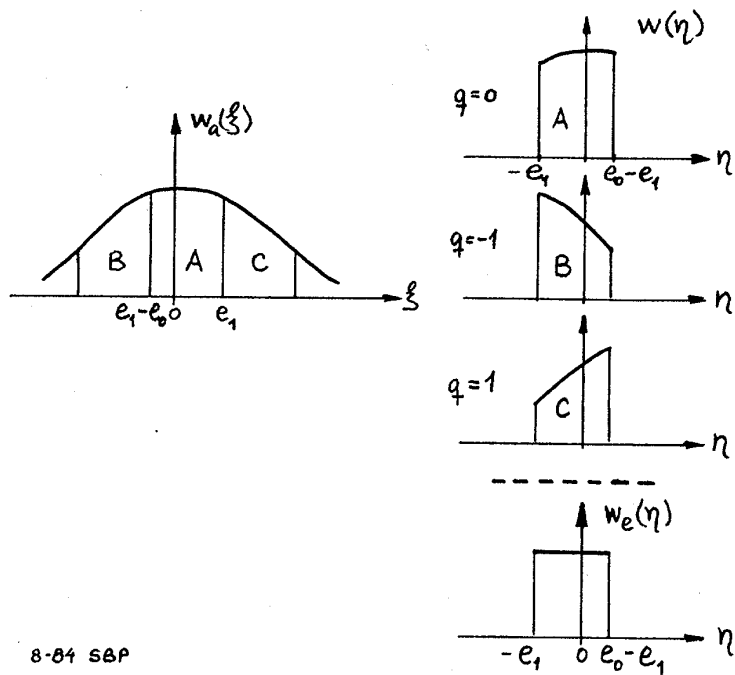
Blandt de mange mulige kvantiseringskarakteristikker, som forskellige værdier af e_1 giver anledning til, er specielt to interessante. Betragtes først tilfældet $e_1 = \frac{1}{2}e_0$, får karakteristikken den symmetriske form, som kan ses på figur 6.7.

På figuren vises også $w_e(\xi)$ samt støjens middelværdi og effekt. Det vil bemærkes, at såfremt $w_a(\xi)$ ikke er bred sammenlignet med e_0 , hvilket tidligere har været forudsat, vil $g(n)$ en god del af tiden være lig nul, og $g_a(t)$ omsættes under sådanne omstændigheder kun dårligt.

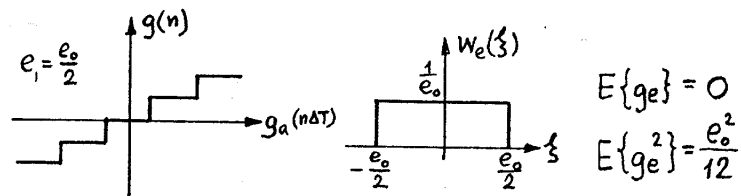
Tilfældet $e_1 = e_0$ giver anledning til en anden form for kvantiseringskarakteristik, se figur 6.8, som udviser andre karakteristika, når $g_a(t)$ er lille. Her vil alle fortegnsskift for $g_a(t)$ bevirke, at $g(n)$ skifter mellem to naboværdier. Omsætningsstøjen vil derfor hele tiden være til stede i $g(n)$. Man kan vise, at kvantiseringsstøjens effekt under disse omstændigheder er større, end den er for afrunding.

Signal/støjforhold ved kvantisering

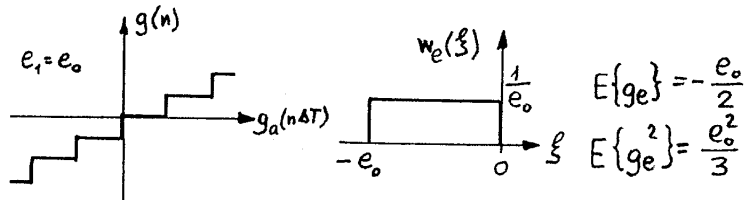
Det opnåelige signal/støjforhold ved kvantiseringsprocessen kan bl.a. udtrykkes derved, at støjens RMS-værdi ses i forhold til RMS-værdien af det størst mulige sinusformede signal, som uforvrænget kan omsættes.



Figur 6.6: Summation af bidragene til sandsynlighedstæthedsfunktionen for kvantiseringsstøjen.



Figur 6.7: Sandsynlighedstæthedsfunktionen for afrunding ved kvantisering.



Figur 6.8: Sandsynlighedstæthedsfunktionen for afskæring ved kvantisering.

Benyttes en analog-digitalomsætter med b bit plus fortegn, kan det sinusformede signals spids-spids værdi højst være $2 \cdot 2^b e_0$. Har kvantiseringskarakteristikken den form, som ses på figur 6.7 ($e_1 = \frac{1}{2}e_0$), bliver signal/støjforholdet i dB

$$20 \log \frac{\text{RMS \{signal\}}}{\text{RMS \{kvantiseringsstøj\}}} = 20 \log \frac{2 \cdot 2^b \cdot e_0}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{12}}{e_0} = 7,78 + 6,02b \text{ dB}, \quad (6.11)$$

Kvantiseringsstøjens spektrum

Kvantiseringsstøjen $g_e(t)$ er båndbegrænset med f_g som øvre grænsefrekvens. Følgelig vil man kunne skrive

$$g_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_e(n\Delta T) \frac{\sin 2\pi f_g(t - n\Delta T)}{2\pi f_g(t - n\Delta T)}. \quad (6.12)$$

For at få en rimelig let udledning af $g_e(t)$'s spektrum er det sædvanlig praksis at antage:

1. at det analoge signal $g_a(t)$ har passende store signalværdier i forhold til størrelsen e_0 , samt
2. at disse signalværdier varierer passende usystematisk, således
3. at to støjværdier $g_e(n\Delta T)$ og $g_e(q\Delta T)$ er ukorrelerede for alle værdier af $n \neq q$.

Disse betingelser, som dels er affødt af ønsket om en enkel matematisk behandling af problemet, og som dels synes at stemme rimeligt godt med praksis, giver anledning til følgende regninger.

Idet

$$g_e(t + \tau) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} g_e(q\Delta T) \frac{\sin 2\pi f_g(t + \tau - q\Delta T)}{2\pi f_g(t + \tau - q\Delta T)}, \quad (6.13)$$

vil kvantiseringsstøjens autokorrelationsfunktion kunne skrives på formen

$$\begin{aligned} R_e(\tau) &= E\{g_e(t)g_e(t + \tau)\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} E\{g_e(n\Delta T)g_e(q\Delta T)\} \frac{\sin 2\pi f_g(t - n\Delta T)}{2\pi f_g(t - n\Delta T)} \frac{\sin 2\pi f_g(t + \tau - q\Delta T)}{2\pi f_g(t + \tau - q\Delta T)} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Ifølge betingelsen 3) ovenfor er

$$E\{g_e(n\Delta T)g_e(q\Delta T)\} = \begin{cases} E\{g_e^2(n\Delta T)\} & \text{for } n = q \\ E^2\{g_e(n\Delta T)\} & \text{for } n \neq q \end{cases} \quad (6.15)$$

Betragtes nu først tilfældet $\underline{E\{g_e(n\Delta T)\}} = 0$, reduceres udtrykket for $R_e(\tau)$ til

$$R_e(\tau) = E\{g_e^2(n\Delta T)\} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi f_g(t - q\Delta T)}{2\pi f_g(t - q\Delta T)} \frac{\sin 2\pi f_g(t + \tau - q\Delta T)}{2\pi f_g(t + \tau - q\Delta T)}, \quad (6.16)$$

som kan skrives på formen

$$R_e(\tau) = E\{g_e^2(n\Delta T)\} \frac{\sin 2\pi f_g \tau}{2\pi f_g \tau} \quad (6.17)$$

(se f.eks. appendix C). Heraf ses det straks, at kvantiseringsstøjens effekttæthedsspektrum $S_e(f)$ er båndbegrænset hvidt

$$S_e(f) = \begin{cases} \frac{1}{2f_g} E\{g_e^2(n\Delta T)\} & \text{for } |f| < f_g \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (6.18)$$

Er $E\{g_e(n\Delta T)\} \neq 0$, tilføjes naturligvis til udtrykket for $R_e(\tau)$ et konstant led svarende til kvantiseringsstøjens DC-effekt. Man får

$$R_e(\tau) = E\{(g_e(n\Delta T) - E\{g_e(n\Delta T)\})^2\} \frac{\sin 2\pi f_g \tau}{2\pi f_g \tau} + E^2\{g_e(n\Delta T)\}. \quad (6.19)$$

Følgelig kommer udtrykket for støjens effekttæthedsspektrum til at indeholde en δ -funktion ved $f = 0$, således at

$$S_e(f) = \begin{cases} \frac{1}{2f_g} \sigma^2\{g_e(n\Delta T)\} + E^2\{g_e(n\Delta T)\} \delta(f) & \text{for } |f| < f_g \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (6.20)$$

Som det er anført ovenfor, er de regninger, som er udført for at klarlægge kvantiseringsstøjens egenskaber, foregået på det analoge signal $g_e(t)$. Da $g_e(t)$ er båndbegrænset, er det i princippet muligt at overføre resultaterne til den digitale side.

I praksis kan man imidlertid komme ud for, at det lille kvantiseringsstøjsignal ikke vil kunne repræsenteres med rimelig nøjagtighed i det talformat, som benyttes til beregningerne på de digitale signaler. Omsætningen af $R_e(\tau)$ til digital form kan foretages på sædvanlig måde (se afsnit 5.3).

Grov kvantisering

Ved udtrykket "grov kvantisering" forstås den situation, der opstår, når $w_a(\xi)$ ikke længere kan anses for at være meget bredere end e_0 . Den enkle udledning af kvantiseringsstøjens egenskaber ovenfor holder da ikke altid.

Man kan dog vise, at det er muligt at nøjes med en kvantisering i få niveauer og alligevel få resultater, som er nøjagtige. Dette gælder specielt bestemmelse af middelværdier for stokastiske signaler (se f.eks. G. A. Korn: Random Process Simulation and Measurements, McGraw-Hill, 1966).

Visse signaler - som tale f.eks. - varierer meget i styrke. Dette indebærer, at kvantiseringsstøjen kan blive generende, hvis A-D omsætterens område ikke udnyttes optimalt. Dette forhold kan i nogen grad afhjælpes ved addition af et lille støjsignal til det analoge signal før kvantiseringen. Efter kvantiseringen subtraheres det samme signal, og denne proces gør under navnet dither⁴.

6.3 Digitale filtre

Signalbehandling i et digitalt filter kan udtrykkes ved differensligningen

$$y(n) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p x(n-p) + \sum_{r=1}^{M-1} b_r y(n-r). \quad (6.21)$$

I udtrykket er $x(n)$ indgangssignalet til filtret, $y(n)$ udgangssignalet fra filtret og a_p og b_r filterkoefficienterne. Filtringen udføres således ved en vægtet summation af indgangssignalet og tidligere udgangsværdier fra filteret. Hvis alle b_r koefficienterne er lig 0 kaldes filtret et FIR (Finite Impulse Response) filter, da impulssvaret har endelig varighed. Hvis b_r koefficienterne er forskellige fra 0 kaldes det et IIR (Infinite Impulse Response) filter.

⁴N. S. Jayant og L. R. Rabiner: The Application of Dither to the Quantization of Speech Signales, B.S.T.J., Vol. 51, No. 6, July-August, 1972.

For et filter, hvor koefficienterne ikke ændres over tiden, kan overføringsfunktionen beregnes ved en direkte fouriertransformation af (6.21):

$$Y(f) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p X(f) e^{-j2\pi p \Delta T f} + \sum_{r=1}^{M-1} b_r Y(f) e^{-j2\pi r \Delta T f}. \quad (6.22)$$

Hermed fås

$$Y(f) \left(1 - \sum_{r=1}^{M-1} b_r e^{-j2\pi r \Delta T f} \right) = X(f) \sum_{p=0}^{N-1} a_p e^{-j2\pi p \Delta T f}$$

$$\Downarrow$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{H_1(f)}{1 - H_2(f)} \quad (6.23)$$

hvor

$$H_2(f) = \sum_{r=1}^{M-1} b_r e^{-j2\pi r \Delta T f}$$

$$H_1(f) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p e^{-j2\pi p \Delta T f} \quad (6.24)$$

Filterets impuls svar findes ved at påtrykke en digital δ -funktion på indgangen. For et FIR filter fås direkte, at impulssvaret er givet ved koefficienterne a_p , således at $h(n) = a_n$. For et IIR filter er impulssvaret væsentlige mere kompliceret at beregne, og ofte er det en fordel at opskrive et skema med de forskellige signalværdier. Et eksempel på dette er givet nedenfor.

Eksempel 6.1 Beregning af impuls svar

I et digitalt filter udføres signalbehandlingen:

$$y(n) = a_0 x(n) + a_2 x(n-2) + b_1 y(n-1)$$

hvor $x(n)$ er indgangssignalet til filteret og $y(n)$ er dets udgangssignal. a_0, a_2 og b_1 er reelle konstanter.

Filterets impuls svar $h(n)$ findes ud fra tabellen:

n	$x(n)$	$x(n-2)$	$y(n-1)$	$y(n)$
0	1	0	0	a_0
1	0	0	a_0	$b_1 a_0$
2	0	1	$b_1 a_0$	$b_1^2 a_0 + a_2$
3	0	0	$b_1^2 a_0 + a_2$	$b_1^3 a_0 + b_1 a_2$
4	0	0	$b_1^3 a_0 + b_1 a_2$	$b_1^4 a_0 + b_1^2 a_2$
5	0	0	$b_1^4 a_0 + b_1^2 a_2$	$b_1^5 a_0 + b_1^3 a_2$
\vdots				\vdots

Der fås altså:

$$h(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ a_0 b_1^n & 0 \leq n \leq 1 \\ a_0 b_1^n + a_2 b_1^{n-2} & N \geq 2 \end{cases}$$

6.4 Realisation af digitale filtre

Når et digitalt filter skal realiseres i praksis, er der flere forhold, som må iagttages, såfremt det resulterende filter skal leve op til forelagte specifikationer.

Disse specifikationer afspejler sædvanligvis et ønske om, at filtret har en given overføringsfunktion, samt at signal/støj-forholdet på filtrets udgang er tilfredsstillende. Hertil kommer ofte kravet om, at den tid, der går til beregning af en ny værdi af udgangssignalet fra filtret, holdes inden for snævre grænser, således at filtret kan benyttes i "sand tid".

En digital filtrering kan naturligvis foregå såvel ved hjælp af specielt konstrueret digitalt udstyr som ved hjælp af programmerbart udstyr. I begge tilfælde benyttes sædvanligvis den tidligere anførte differensligning

$$y(n) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p x(n-p) + \sum_{r=1}^{M-1} b_r y(n-r) \quad (6.25)$$

som udgangspunkt. I udtrykket er $x(n)$ indgangssignalet til filtret, $y(n)$ udgangssignalet fra filtret og a_p og b_r filterkoefficienterne.

Selv om et givet filter principielt kan realiseres direkte efter denne ligning, har erfaringen vist, at det er nyttigt at søge at omforme udtrykket således, at der tages passende hensyn til følgende forhold:

1. antallet af aritmetiske operationer (additioner og multiplikationer) minimeres,
2. antallet af gemte værdier af $x(n)$ og $y(n)$ minimeres,
3. antallet af bit i repræsentationen for $x(n)$ og $y(n)$ og for filtrets konstanter minimeres, og
4. filtre, hvor N og M er større end 2-3, undgås.

Filtre, som konstrueres med skyldig hensyntagen til disse undertidende modstridende krav, giver i reglen en løsning, som er gunstig med hensyn til såvel stabilitet, støjforhold, udstyringsforhold og hastighed. Hvor der er tale om filtre af FIR-typen (d.v.s. hvor $b_r = 0$), kræves der næsten altid en værdi af N , som langt overskrider den størrelse, der er anført i punkt 4. Sådanne filtre benyttes imidlertid ofte i forbindelse med løsninger, hvor der opereres med flere forskellige værdier af samplingtidsintervallet. Detaljer om sådanne realisationer må findes andetsteds (f.eks. Crochiere & Rabiner, 1983).

Ved filtre af IIR-typen (d.v.s. hvor ikke alle $b_r = 0$) er det som regel nødvendigt at opspalte filtrets overføringsfunktion $H(f)$ i et produkt af passende valgte delfiltres overføringsfunktioner, som derpå hver kan realiseres med de begrænsninger i N og M , som punkt 4 tilsiger.

Hvorledes man finder filterkoefficienterne, når $H(f)$ er givet, vil ikke blive omtalt her, men der henvises til den omfattende litteratur om emnet, som også omfatter regnemaskinprogrammer til filterdimensionering. Det vil dog nok være på sin plads at omtale et par enkle regler, hvormed man kan modificere forelagte filteres impulssvar og på den måde få nye filtre med specielle egenskaber. Disse regler er specielt nyttige ved FIR-filtre, men kan også bringes i anvendelse ved IIR-filtre.

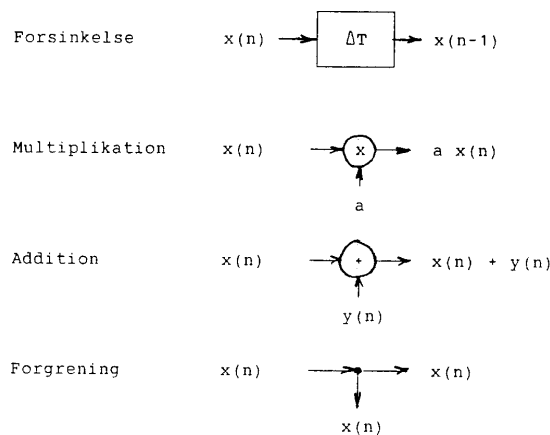
Frekvensforskydningsreglen (se afsnit 2.6) kan generelt udtrykkes på formen

$$h(n)e^{j2\pi f_0 n \Delta T} \xleftrightarrow{\Delta T} H(f - f_0) \quad (6.26)$$

hvor f_0 er en konstant.

Der er altså mulighed for at forskyde overføringsfunktionen på frekvensaksen og således på simpel vis realisere en filterbank med ens filtre. Omsat til reel form lyder reglen f.eks.

$$2h(n) \cos(2\pi f_0 n \Delta T) \xleftrightarrow{\Delta T} H(f - f_0) + H(f + f_0) \quad (6.27)$$



Figur 6.9: Symboler for digitale operationer.

Bemærk, at med $f_0 = f_g$, bliver cos-faktoren til $(-1)^n$.

For god ordens skyld erindres det om, at $H(f - f_0)$ og $H(f + f_0)$ godt kan være overlappende, når f_0 har værdier i visse intervaller på frekvensaksen, samt at $H(f)$ jo er periodisk med perioden $2f_g = \frac{1}{\Delta T}$.

Reglen om indskydning af nuller mellem to på hinanden følgende værdier af et filters impulssvar er også en måde at konstruere nye filtre på ud fra et forelagt filter.

Indskydes $K - 1$ nuller mellem hver to på hinanden følgende værdier af $h(n)$, fremkommer

$$h_K(n) = \begin{cases} h(\frac{n}{K}), & \text{når } \frac{n}{K} \text{ er hel} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (6.28)$$

Dette filters overføringsfunktion $H_K(f)$ beregnes af

$$\begin{aligned} H_K(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_K(n) e^{-j2\pi f n \Delta T} \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} h(p) e^{-j2\pi f p K \Delta T} \end{aligned} \quad (6.29)$$

eller

$$h_K(n) \xleftrightarrow{\Delta T} H(Kf) \quad (6.30)$$

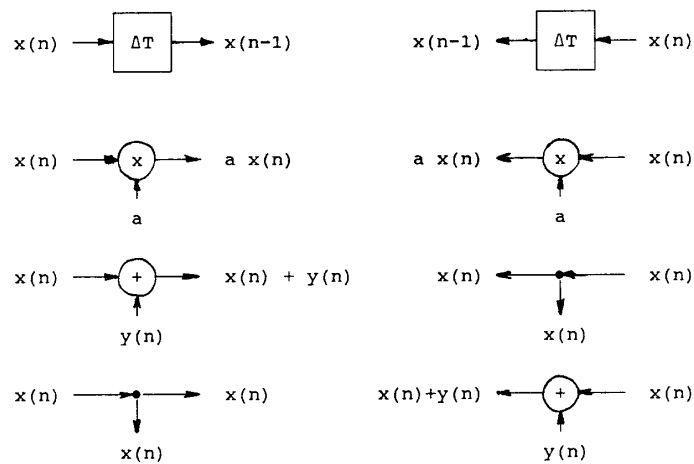
Også her skal man være opmærksom på $H(f)$'s periodicitet.

6.4.1 Realisationsformer

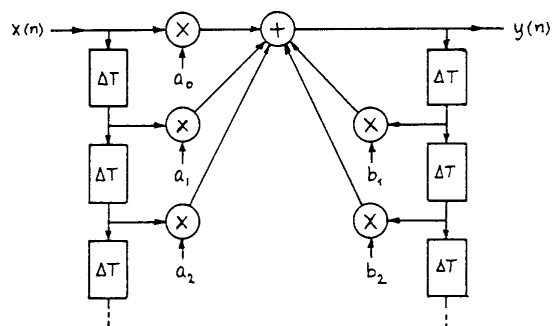
Ved overvejelse om hvorledes en given filterberegning skal organiseres, er det nyttigt at benytte blokdiagrammer. I blokdiagrammerne indgår symboler for forsinkelse, multiplikation, addition og forgrening, se figur 6.9.

Da digitale filtre er tidsinvariante, digitale netværk, kan elementer, som indgår i en af blokdiagrammets grene, ombyttes uden ændring af filtrets impulssvar og overføringsfunktion.

Blokdiagrammer for digitale filtre kan også ændres ved en transponering. Transponering foregår på den måde, at transmissionsretningen for alle systemets komponenter vendes - herunder gøres dets indgang



Figur 6.10: Transponering af digitale operationer.



Figur 6.11: Direkte form 1 (DF1).

til dets udgang og vice versa -, at alle forgreninger ændres til summationspunkter og alle summationer til forgreningspunkter (se figur 6.10).

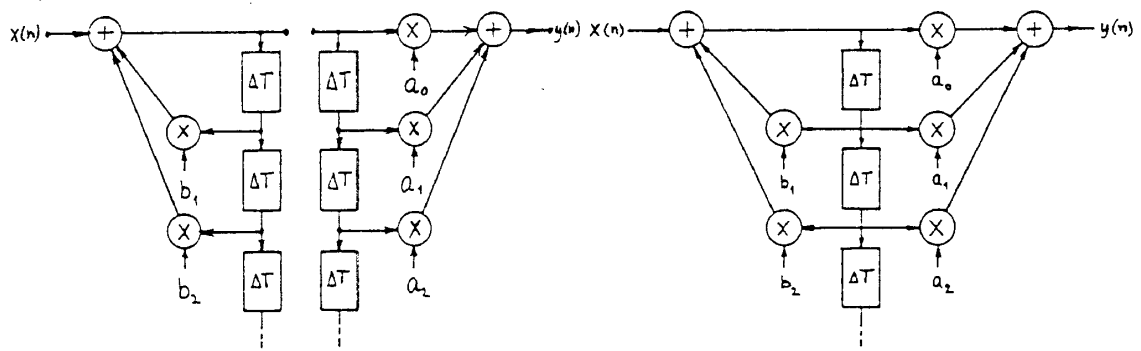
Organiseres filterberegningerne direkte efter differensligningen, benævnes realisationsformen Direkte form 1, som er vist på figur 6.11.

Spalter man det viste additionssymbol op i to, et for de forsinkede x -værdier og et for de forsinkede y -værdier, ses det umiddelbart, at man kan fortolke de to dele af diagrammet som to separate, seriekoblede filtre. De to halvdele af blokdiagrammet kan derfor ombyttes, og således fremkommer realisationsformen Direkte form 2, se figur 6.12, hvor antallet af lagrede værdier reduceres til ca. halvdelen af det, som er nødvendigt i Direkte form 1. Det samme resultat kan fremkomme ved transponering.

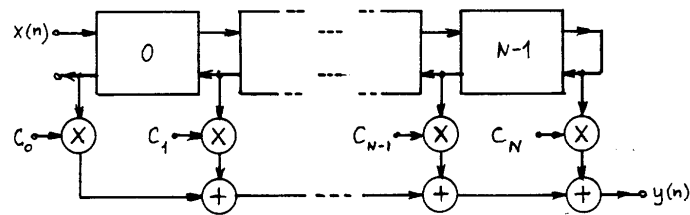
Ud over disse to former for filterrealisation er der ved filtre, hvor nogle af multiplikatorerne er ens, yderligere mulighed for at simplificere beregningsskemaet. I denne gruppe falder bl.a. de FIR-filtre, hvis impulsvar opfylder betingelsen $h(n) = h(N - 1 - n)$, hvor N er længden af filtrets impulsvar.

I øvrigt kan man undertiden i aktuelle tilfælde udnytte, at to eller flere filterkonstanter kan skrives som et produkt, hvori der indgår en fælles faktor.

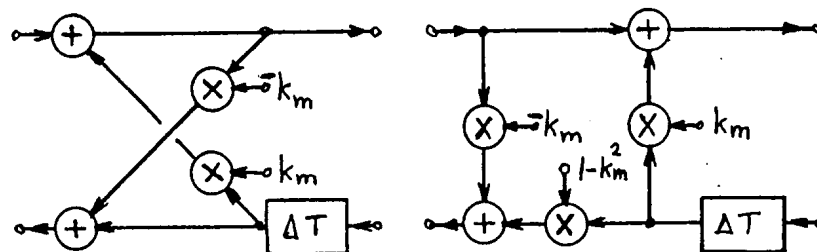
Ved yderligere manipulation med ligningerne for de digitale filtre - og med passende skelen til analog filterteknik - er det muligt at nå frem til endnu en strukturform: stige- og gitterstrukturen (se figur 6.13), hvor indholdet af de enkelte blokke kan antage forskellige former, af hvilke et par er vist på figur 6.14.



Figur 6.12: Direkte form 2 (DF2).



Figur 6.13: Gitterstruktur.



Figur 6.14: Gitter- og stige-blokke.

Denne realisationsform udmærker sig navnlig ved, at konstanten k_m for sektion m er mindre end 1 for alle m , hvis filtret er stabilt, samt at det i reglen gælder, at den nøjagtighed, hvormed k_m skal specificeres, er ret lav.

6.4.2 Filterberegningen

Når de beregninger, som realisationen af et digitalt filter kræver, skal udføres, er det nødvendigt at fastlægge den talrepræsentation, der skal benyttes. Dernæst må man af hensyn til overløb ved beregningerne sørge for, at de tal, der regnes på, er passende skalerede, d.v.s. sørge for, at de varierer inden for acceptable grænser. Endelig må det antal bit, som regninger udføres med, afstemmes dels efter det udstyrsområde, der ønskes, dels med henblik på at den støj, der fremkommer ved beregningerne, holdes under foreskrevne grænser.

Da erfaringen viser, at det beregningsskema, som benyttes ved en filterrealisation, har stor betydning for, hvorledes disse krav kan opfyldes, kan der her kun anføres visse almindelige retningslinier for problemernes løsning.

I det følgende antages det, at signalværdierne, som skal bearbejdes, repræsenteres på brøkdelsform, samt at additioner ikke giver overløb. De eneste fejlkilder i beregningsprocessen er da den unøjagtighed, som optræder, når multiplikationer afkortes til b bit plus fortegn (se afsnit 6.1).

Overløb i filterberegningen

En metode til vurdering af hvilken maksimal størrelse man kan forvente, at udgangssignalet fra et digitalt filter - eller fra en vilkårlig del af et sådant filter - har, tager sit udgangspunkt i foldningsudtrykket

$$y(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h(p)x(n-p), \quad (6.31)$$

hvor $h(n)$ er filtrets eller delfiltrets impulssvar.

I praksis vil indgangssignalet $x(n)$ til et sådant filter altid være begrænset, enten det stammer fra en anden digital beregning eller fra en A/D-konverter, d.v.s. med det givne talformat.

$$|x(n)| \leq k_x \quad (6.32)$$

hvor $k_x < 1$ er en konstant. Derfor vil

$$|y(n)| \leq k_x \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \quad (6.33)$$

Det anføres i litteraturen, at denne grænse ofte er for pessimistisk.

En anden vurderingsmetode er baseret på ligningen

$$y(n) = \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} X(f)H(f) e^{j2\pi f n \Delta T} df \quad (6.34)$$

som ved hjælp af Schwarz' ulighed (se appendix B) kan omformes til

$$\begin{aligned} |y(n)|^2 &\leq \left(\frac{1}{2f_g} \right)^2 \int_{-f_g}^{f_g} |H(f)|^2 df \int_{-f_g}^{f_g} |X(f)|^2 df \\ |y(n)| &\leq \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n)} \end{aligned} \quad (6.35)$$

I dette udtryk er $h(n)$ kendt. Ligning 6.34 kan også give

$$|y(n)| \leq \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} |X(f)||H(f)| df \leq |H|_{max} \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} |X(f)| df \quad (6.36)$$

hvor $|H|_{max}$ er den maksimale værdi af $|H(f)|$. Tilsvarende fås

$$|y(n)| \leq |X|_{max} \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} |H(f)| df \quad (6.37)$$

hvor $|X|_{max}$ er den største værdi af $|X(f)|$.

For stokastiske indgangssignaler kan ovenstående vurderinger ikke anvendes. For sådanne signaler gælder det, at det er formen af sandsynlighedstæthedsfunktionen efter filteret, som er bestemmende for, om der finder overstyring sted. Som anført i afsnit 5.7, er det kun sjældent muligt at sige noget om denne sandsynlighedstæthedsfunktion, ud over at den ofte vil nærme sig en gauss-fordeling. Har man derfor kendskab til udgangssignalets effekt P_y , er det enkelt at få et skøn over $y(n)$'s maksimale amplitudeværdier. Man har

$$P_y = \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} |H(f)|^2 S_x(f) df \quad (6.38)$$

hvor $S_x(f)$ er effektspektret for $x(n)$.

Såfremt $S_x(f)$ er konstant over det frekvensområde, hvor $|H(f)|^2$ antager betydende værdier, vil man tilnærmet have

$$P_y \leq S_x(f_0) \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} |H(f)|^2 df \quad (6.39)$$

eller

$$P_y \leq S_x(f_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n) \quad (6.40)$$

hvor f_0 er en frekvens i filterets gennemgangsområde.

Dermed bliver sandsynlighedstæthedsfunktionen $w_y(\xi)$ for udgangssignalet

$$W_y(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_y}} e^{-\frac{\xi^2}{2P_y}}, \quad \xi \in [-\infty, \infty]. \quad (6.41)$$

Her kan altså fremkomme vilkårligt store amplitudeværdier. Vurderingen af, hvor hyppigt sådanne amplitudeværdier forekommer, vil blive fremlagt i afsnit 7.1.3.

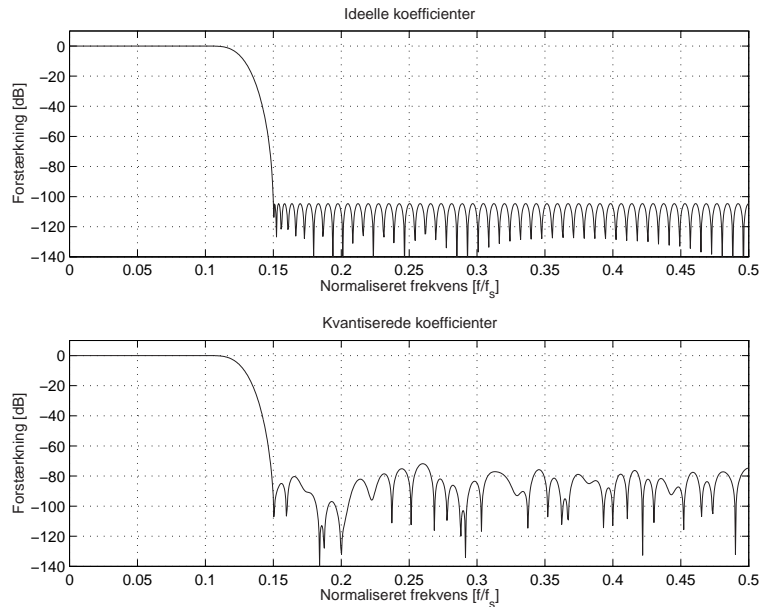
Støj fra filterberegningen

Egenskaberne ved den støj, som frembringes ved en multiplikation af en signalværdi med en filterkonstant, antages at være som omtalt i afsnit 6.1. I praksis er man ofte interesseret i, hvilken støj en sådan støjkilde giver anledning til på filterets udgang. Dette afhænger af, hvor i filteret støjkilderne er anbragt. Er multiplikationerne anbragt direkte ved udgangen, bliver resultatet som anført i afsnit 6.1. Såfremt dette ikke er tilfældet, vil det næsten altid være sådan, at støjsignalet passerer hele filteret eller en del heraf, før det når udgangen. Kaldes delfilterets impulsvar $h_d(n)$ og dets overføringsfunktion $H_d(f)$, vil støjsignalets effektspektrum på filterudgangen være

$$P_s |H_d(f)|^2 \quad (6.42)$$

hvor P_s er støjkildens effekt. Følgelig bliver støjsignalets effekt P_y på filterets udgang

$$P_y = \frac{P_s}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} |H_d(f)|^2 df. \quad (6.43)$$



Figur 6.15: Amplitudekarakteristik for digital FIR lavpasfilter uden (top) og med (bund) kvantisering af filterkoefficienterne.

Anvendelse af Parsevals sætning giver

$$P_y = P_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d^2(n), \quad (6.44)$$

som i visse tilfælde er enklere at beregne.

Har filterberegningerne flere multiplikationer, betragtes de hertil hørende støjkilder som stokastisk uafhængige, hvorfor den samlede effekt på filtrets udgang hidrørende fra multiplikationerne fremkommer ved en addition af de effekter, som de enkelte støjkilder giver anledning til på udgangen.

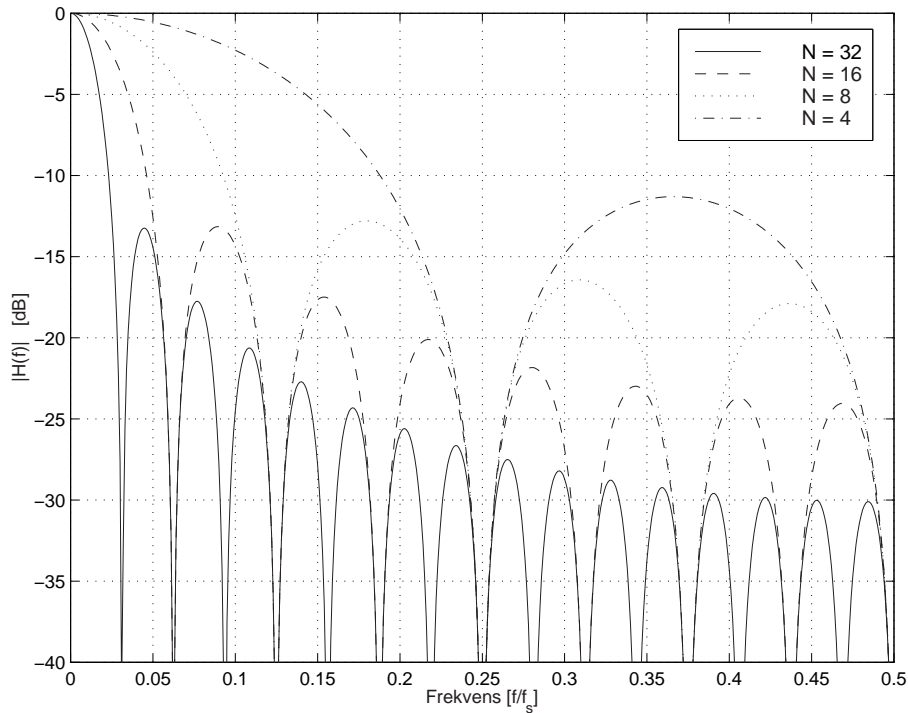
Det er ovenfor stiltiende forudsat, at der anvendes afrunding ved multiplikationerne. Såfremt der benyttes afskæring, må der tages hensyn til støjens DC-komponent (se afsnit 6.1).

Kvantisering af filterkoefficienterne

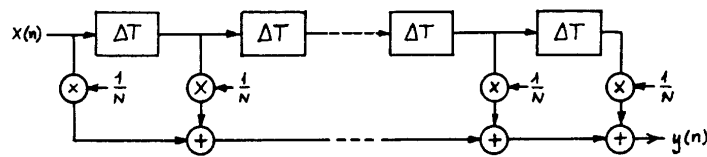
Ved implementering af digitale filtre er man tvunget til at kvantisere filterkoefficienterne til den præcision, der kan håndteres af den givne elektronik. Herved vil overføringsfunktionen for filteret også blive ændret. Denne ændring kan karakteriseres ved at benytte (6.23) med de kvantiserede koefficienter. I figur 6.15 er vist et eksempel for et digital FIR lavpasfilter. Den øverste kurve viser overføringsfunktionen med de ideelle koefficienter, og den nederste kurve viser overføringsfunktionen, når koefficienterne er kvantiseret til 16 bits præcision. Det ses, hvordan stopbåndet ændres, så dæmpningen her bliver mindre end antaget under designet af filteret.

6.4.3 Eksempler på realisation af enkle digitale filtre

Til illustration af de ovenfor omtalte aspekter ved realisation af digitale filtre gennemgås nogle forskellige måder at organisere filterberegningerne på i et simpelt FIR-filter og i et simpelt IIR-filter.



Figur 6.16: Amplitudekarakteristik for den digitale integrator.



Figur 6.17: Umiddelbar realisation af digital integrator.

Den digitale integrator

Den signalbearbejdning, som udføres af den digitale integrator, er givet ved

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{q=n-N+1}^n x(q) \quad (6.45)$$

Integratorens impulsvar $h(n)$ er derfor

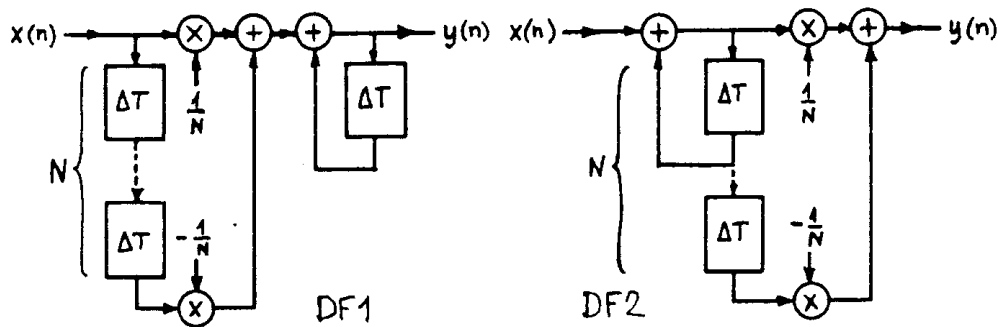
$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (6.46)$$

og dens overføringsfunktion (se afsnit 2.7.2)

$$H(f) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi f N \Delta T)}{\sin(\pi f \Delta T)} e^{-j\pi f (N-1)\Delta T} \quad (6.47)$$

Figur 6.16 viser amplitudetæthedsspektret $|H(f)|$ for forskellige værdier af N .

Filtret kan realiseres direkte efter udtrykket som vist på figur 6.17, hvilket er ugunstigt, set ud fra såvel et støjsynspunkt som et beregningstidssynspunkt. Da faktoren $\frac{1}{N}$ er den samme for alle multiplikationer,



Figur 6.18: Rekursiv realisering af digital integrator.

kan de naturligvis slås sammen og enten flyttes til filtrets indgang eller til dets udgang. Man kan vise, at det sidstnævnte tilfælde er gunstigt set ud fra et støjsynspunkt, idet den til multiplikationerne hørende støjkilde da sidder direkte på filterets udgang. Regnes der med resultatværdier på b bit plus fortegn, er støjefeffekten fra en multiplikation

$$P_0 = \frac{1}{12} 2^{-2b}, \quad (6.48)$$

og støjefeffekten P_y på udgangen af filtret har da denne størrelse.

Såfremt multiplikationerne anbringes ved filtrets indgang, må støjsignalet for at nå udgangen gennemløbe et delfilter med impulssvaret

$$h_d(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (6.49)$$

P_y bliver derfor

$$P_y = P_0 \sum_{n=0}^{N-1} h_d^2(n) = NP_0, \quad (6.50)$$

altså det samme som ved en realisation efter figur 6.17. Den spektrale sammensætning af støjen på filtrets udgang er imidlertid forskellig i de to tilfælde.

Med multiplikationerne på filtrets indgang bliver støjspektret

$$P_0 |H_d(f)|^2 \quad (6.51)$$

medens det ellers er hvidt.

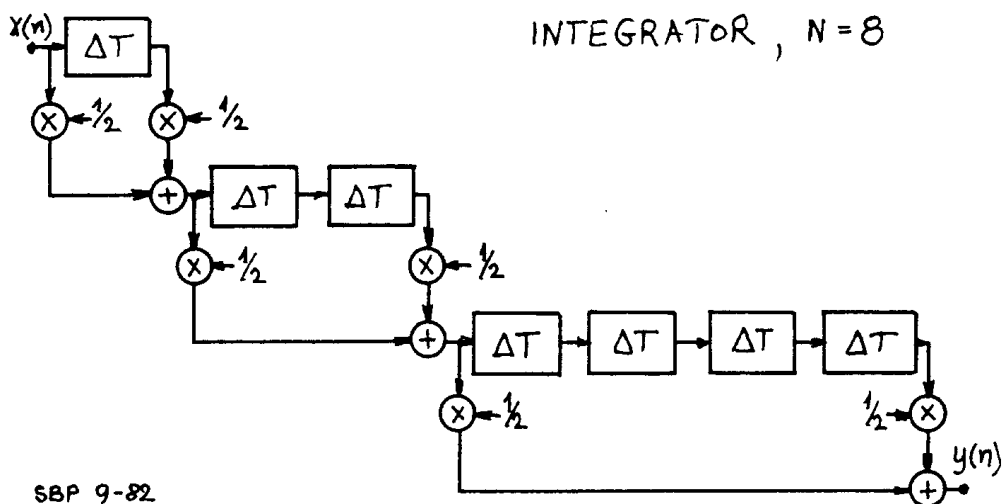
Integratoren kan også realiseres rekursivt, idet

$$y(n) = \frac{1}{N} x(n) - \frac{1}{N} x(n-N) + y(n-1) \quad (6.52)$$

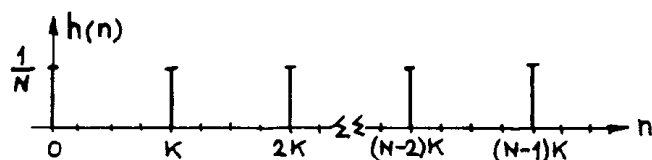
Dette beregningsskema kan omsættes til de blokdiagrammer, som vises på figur 6.18. Heraf ses det umiddelbart, at realisationen kan opspaltes i et kamfilter og et ikke stabilt IIR-filter, og at der både er en Direkte form 1 og en Direkte form 2 løsning. Af disse giver den sidste problemer af numerisk art, hvis $x(n)$ har en DC-komponent, og sædvanlig støjberegning kan ikke foretages i DF1 tilfældet.

Når $N = 2^r$, hvor r er hel, vil den digitale integrator kunne realiseres som en seriekombination af r simple kamfiltre, se eksemplet på figur 6.19, hvor $N = 8$.

To forhold ved denne realisationsform medvirker til at give mindre støj på filtrets udgang. For det første bliver antallet af multiplikationer $2r$, og for det andet vil støjen fra en del af disse skulle gennemløbe forskellige delfiltre på vejen til filtrets udgang og dermed blive reduceret effektmæssigt.



Figur 6.19: Realisation af digital integrator $N = 2^3$ med 3 kamfiltre.



Figur 6.20: Impulssvar for den digitale averager.

For $N = 8$ realiseret som vist på figur 6.19 bliver støjefekten på udgangen $P_y = 3.5P_0$. Det kan vises, at

$$P_y = 4P_0 \sum_{q=1}^r \frac{1}{2^q} \quad (6.53)$$

i det almindelige tilfælde. Bemærk, at $P_y \rightarrow 4P_0$, når $r \rightarrow \infty$.

Nært beslægtet med den digitale integrator er den digitale averager. Den fremkommer, dersom man indskyder $K - 1$ nuller mellem to på hinanden følgende værdier af impulsvaret for den digitale integrator (se figur 6.20).

Averagerens impulssvar bliver da

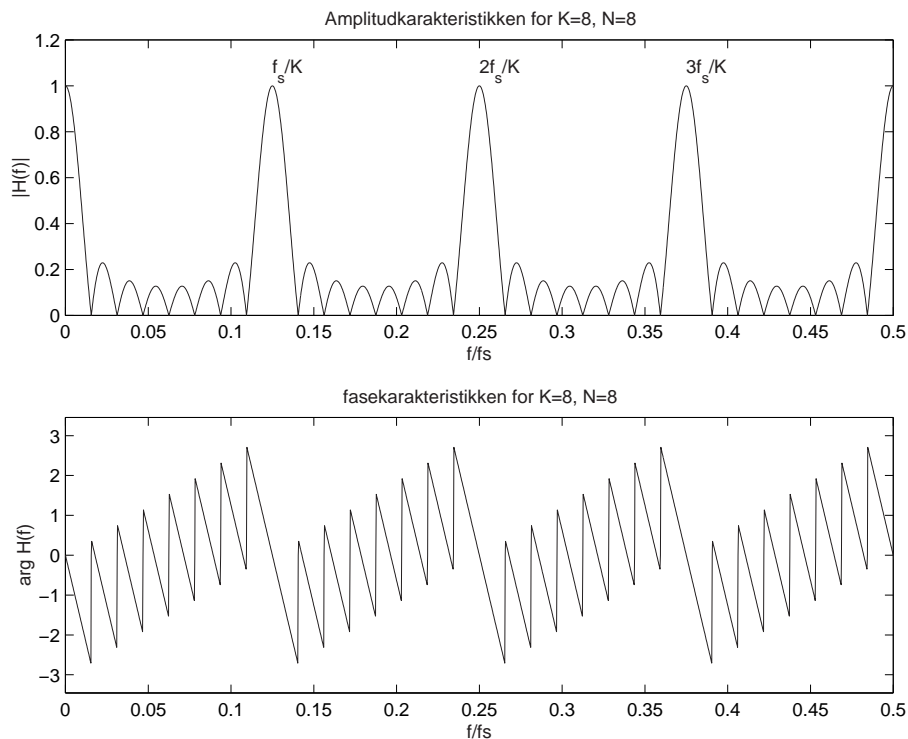
$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{for } n = pK, \quad p = 0, 1, \dots, N - 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (6.54)$$

Den tilhørende overføringsfunktion

$$H(f) = \frac{1}{N} \frac{\sin(NK\pi f \Delta T)}{\sin(K\pi f \Delta T)} e^{-j(N-1)K\pi f \Delta T} \quad (6.55)$$

som ses afbildet på figur 6.21.

Som det fremgår af udtrykket for overføringsfunktionen, er den periodisk med perioden $\frac{1}{K\Delta T}$. Dens fasedel varierer lineært og har værdien 0 for alle frekvenser, som er et helt multiplum af $(K\Delta T)^{-1}$. Dette filter er følgelig meget velegnet til filtrering af et periodisk signal med periodetiden $K\Delta T$. Filtrets indsvingningstid er $NK\Delta T$.



Figur 6.21: Amplitude- og fasekarakteristik for den digitale averager.

Første ordens digitalt filter

Det er en almindelig erfaring, at IIR-filtre kræver forholdsvis få beregninger for at realisere en given overføringsfunktion. At benytte sådanne filtre - specielt de hvor M og N er større end 2 - giver dog også visse problemer. De er således oftere følsomme over for unøjagtigheder i filterkoefficienterne, og de udviser den såkaldte dødzone opførsel (se nedenfor).

Signalbearbejdning, som udføres i et første ordens IIR-filter, er givet ved

$$y(n) = a_0x(n) + b_1y(n-1) \quad (6.56)$$

hvor a_0 og b_1 er konstanter. Det kræves at $|b_1| < 1$, såfremt filtret skal være stabilt, og filtrets impulssvar er givet ved

$$h(n) = \begin{cases} a_0b_1^n & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases} \quad (6.57)$$

Overføringsfunktion kan skrives på formen

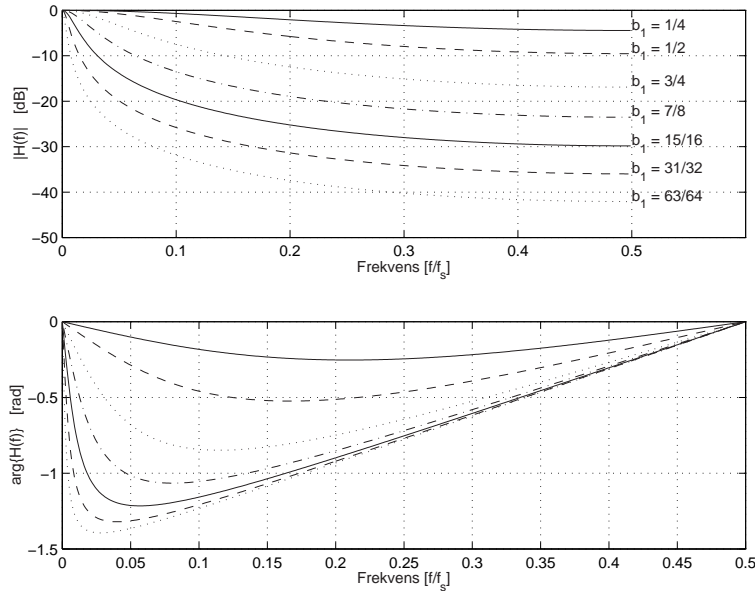
$$H(f) = \frac{a_0}{1 - b_1 e^{-j2\pi f \Delta T}} \quad (6.58)$$

Filtrets forstærkning ved $f = 0$ er da $a_0/(1 - b_1)$. Af bekvemmelighed antages det i det følgende, at $H(0) = 1$, hvilket har til følge, at $a_0 = 1 - b_1$.

Filtrets konstant b_1 kan findes af følgende udtryk

$$b_1 = 2 - \cos\left(\pi \frac{f_0}{f_g}\right) - \sqrt{\left(2 - \cos\left(\pi \frac{f_0}{f_g}\right)\right)^2 - 1} \quad (6.59)$$

hvor f_0 er den ønskede 3 dB grænsefrekvens. f_g er den halve samplingfrekvens d.v.s. $f_g = \frac{1}{2\Delta T}$. Er f_0 meget lav i forhold til f_g , vil det viste udtryk for b_1 kunne give unøjagtige resultater. I sådanne tilfælde



Figur 6.22: Amplitude- og fase-karakteristik for 1. ordens filter for forskellige værdier af b_1 , når $a_0 = 1 - b_1$.

kan man have nytte af, at

$$\cos\left(\pi \frac{f_0}{f_g}\right) \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\pi \frac{f_0}{f_g}\right)^2 \quad \text{for } f_0 \ll f_g \quad (6.60)$$

som bevirker, at

$$b_1 \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\pi \frac{f_0}{f_g}\right)^2 - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \left(\pi \frac{f_0}{f_g}\right)^2\right)^2 - 1} \quad (6.61)$$

eller

$$b_1 \approx 1 - \pi \frac{f_0}{f_g} + \frac{1}{2} \left(\pi \frac{f_0}{f_g}\right)^2 \quad (6.62)$$

Den sidste tilnærmelse giver en afvigelse på under 10^{-3} , når $f_0 < 0,06 f_g$.

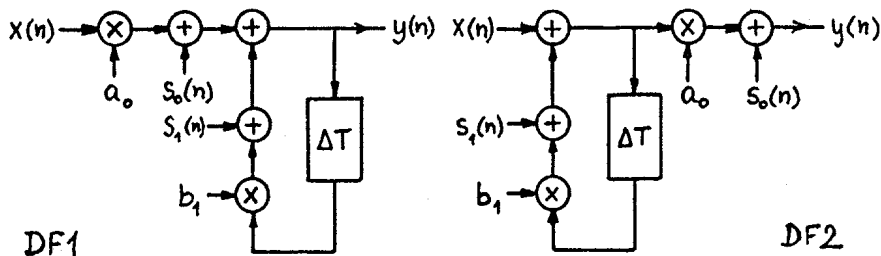
Ved en realisation af filtret må konstanterne a_0 og b_1 kvantiseres, og dette får betydning for, hvilke grænsefrekvenser man kan få frem. Repræsenteres de to konstanter som brøkdeler med b bit plus fortegn, kan der i alt fås $2^b - 1$ forskellige filtre. Figur 6.22 viser amplitude- og fasekarakteristikkerne for 1. ordens filtret for forskellige værdier af a_0 og b_1 .

Når det antal bit, som b_1 skal repræsenteres ved, er fastlagt, kan a_0 repræsenteres eksakt ved det samme antal bit efter det binære radixpunkt, da summen af a_0 og b_1 skal være 1, når $H(0) = 1$.

På figur 6.23 ses blokdiagrammer for filterberegningerne (Direkte Form 1 og Direkte Form 2). Den støj, som fremkommer ved de viste multiplikationer, er symboliserede ved de uafhængige støjgeneratore $s_0(n)$ og $s_1(n)$.

I filtret efter Direkte Form 1 passerer støjen fra begge støjgeneratore filtret med impulssvaret b_1^n , ($n \leq 0$), hvorfor støjefekten P_y på filtrets udgang bliver

$$P_y = 2 \cdot \frac{2^{-2b}}{12} \sum_{n=0}^{\infty} b_1^{2n} = \frac{2^{-2b}}{6} \frac{1}{1 - b_1^2}, \quad (6.63)$$



Figur 6.23: Placering af støjkilder for DF1 og DF2 realisering af første ordens filter.

hvis beregningerne udføres med b bit plus fortegn. Udgangsstøjens effektspektrum vil selvfølgelig have en form, som svarer til kvadratet på den numeriske værdi af filtrets overføringsfunktion.

Forholdene ved en realisation af filtret efter en Direkte Form 2 er lidt anderledes, idet støjgeneratoren $s_1(n)$ passerer filtret med impulssvaret $a_0 b_1^n$, $n \leq 0$, hvorimod $s_0(n)$ direkte sidder ved udgangen af filtret. Man finder i dette tilfælde

$$\begin{aligned}
 P_y &= \frac{2^{-2b_b}}{12} + \frac{2^{-2b_a}}{12} \sum_{n=0}^{\infty} a_0 b_1^{2n} \\
 &= \frac{2^{-2b_b}}{12} + \frac{2^{-2b_a}}{12} \frac{a_0^2}{1 - b_1^2},
 \end{aligned} \tag{6.64}$$

hvor b_a er det antal bit, som filterberegningerne gennemføres med, og hvor b_b er det antal bit, som $y(n)$ repræsenteres med.

Bemærk, at støjens frekvensmæssige sammensætning er en anden end i realisationen med Direkte Form 1, idet spektret af $s_0(n)$ jo er hvidt.

For begge realisationsformer gælder det, at hvis a_0 er lille vil filtrets dynamiske område reduceres med en faktor svarende til a_0 's størrelse, såfremt bitantallet ikke udvides passende under beregningerne.

Som ethvert filter, der realiseres ved en rekursiv fremgangsmåde, udviser et 1. ordens digitalt lavpasfilter en dødzoneopførsel, d.v.s. ved påtrykt indgangssignal (DC) vil udgangssignalet fra filteret ikke indstille sig helt nøjagtigt til denne værdi⁵. Størrelsen af denne dødzone kan tilnærmet beregnes på følgende måde.

Såfremt filterberegningen udføres med uendelig stor præcision, vil man have, at hvis $x(n) = x_0$, vil $y(n) \rightarrow x_0$ for $n \rightarrow \infty$, idet det antages, at $H(0) = 1$.

Sættes $x(n) = x_0$, og omformes filterudtrykket således, at

$$y(n) = b_1(y(n-1) - x_0) + x_0 \tag{6.65}$$

vil man på et vist tidspunkt have den situation, som er illustreret på figur 6.24

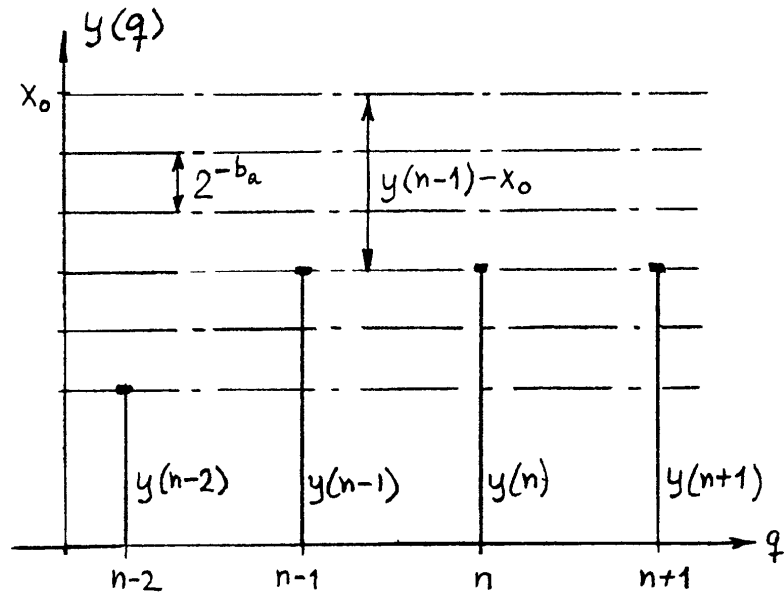
Såfremt produktet $b_1(y(n-1) - x_0)$ på grund af den begrænsede beregningsnøjagtighed får samme værdi som $(y(n-1) - x_0)$, vil man få, at $y(n) = y(n-1)$ fra dette tidspunkt at regne. Her gælder altså

$$|y(n-1) - x_0| - |b_1(y(n-1) - x_0)| > \frac{1}{2} 2^{-b_a} \tag{6.66}$$

og forskellen mellem $y(n)$ og x_0 kan således ikke bringes ned under

$$\frac{1}{2} \frac{2^{-b_a}}{1 - b_1}, \tag{6.67}$$

⁵Dødzoneproblemerne kan også ved visse filtere give sig udtryk i, at der, når indgangssignalet fjernes, findes et periodisk signal på udgangen af filtret (limit cycle oscillations).



Figur 6.24: Dødzonen.

som er dødzonens størrelse.

Eksempel 6.2 Støjberegning

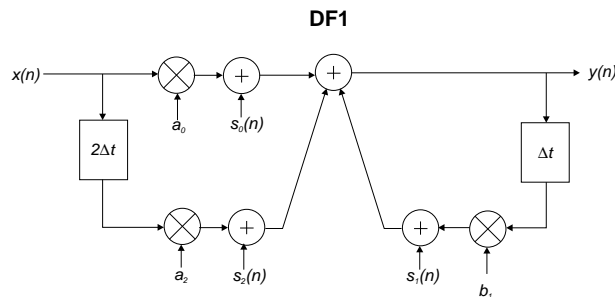
I et digitalt filter udføres signalbehandlingen:

$$y(n) = a_0x(n) + a_2x(n-2) + b_1y(n-1)$$

hvor $x(n)$ er indgangssignalet til filteret og $y(n)$ er dets udgangssignal. a_0, a_2 og b_1 er reelle konstanter.

Beregningerne i filteret udføres med signalværdier og konstanter i brøkdelsrepræsentation. Det kan antages, at additioner udføres fejlfrit, og at multiplikationerne udføres med afrunding. Alle beregningsstøjklender regnes helt ukorrelerede, og støjeffekten hidrørende fra en multiplikation kaldes P_0 .

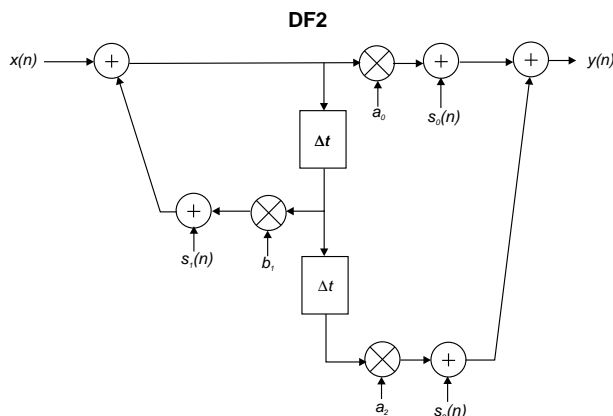
Blokdiagram for filteret i direkte form 1 med angivelse af beregningsstøjkildernes placering:



Alle tre støjkilder passerer filteret $y(n) = b_1y(n-1) + s(n)$. Hermed fås støjeffekten på udgangen:

$$P_y = 3P_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^2(n) = 3P_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (b_1^2)^n = \frac{3p_0}{1 - b_1^2}$$

Blokdiagram for filteret i direkte form 2 med angivelse af beregningsstøjkildernes placering:



Støjilden $s_1(n)$ passerer her hele filteret, hvorimod de to andre kilder sidder direkte på udgangen. Herved fås:

$$\begin{aligned}
 P_y &= 2P_0 + P_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^2(n) \\
 &= 2P_0 + P_0 \left(a_0^2 + (a_0 b_1)^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} (a_0 b_1^n + a_2 b_1^{n-2})^2 \right)
 \end{aligned}$$

Det sidste led kan skrives som:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (a_0 + \frac{a_2}{b_1^2})^2 b_1^{2n} = b_1^4 \sum_{n=0}^{+\infty} (a_0 + \frac{a_2}{b_1^2})^2 (b_1^2)^n = \frac{b_1^4 (a_0 + \frac{a_2}{b_1^2})^2}{1 - b_1^2}$$

Hermed fås:

$$\begin{aligned}
 P_y &= P_0 \left(2 + a_0^2 + (a_0 b_1)^2 + \frac{b_1^4 (a_0 + \frac{a_2}{b_1^2})^2}{1 - b_1^2} \right) \\
 &= P_0 \left(2 + \frac{a_0^2 - a_0^2 b_1^2 + a_0^2 b_1^2 - a_0^2 b_1^4 + a_0^2 b_1^4 + 2a_0 a_2 b_1^2 + a_2^2}{1 - b_1^2} \right) \\
 &= P_0 \left(2 + \frac{a_0^2 + 2a_0 a_2 b_1^2 + a_2^2}{1 - b_1^2} \right)
 \end{aligned}$$

Betingelsen for at DF1 realiseringen er bedst støjmessigt, når det antages at $a_0 = a_2$ og $b_1 = 1/2$:

Indsat i udtrykket ovenfor giver det:

$$\begin{aligned}
 \frac{3P_0}{1 - 1/4} &< P_0 \left(2 + \frac{a_0^2 + 0.5a_0^2 + a_0^2}{1 - 1/4} \right) \\
 \Downarrow \\
 4P_0 &< P_0 \left(2 + \frac{4 \cdot 2 \cdot 0.5a_0^2}{3} \right) \\
 \Downarrow \\
 a_0^2 &> 0.60
 \end{aligned}$$

Kravet på a_0 er altså:

$$|a_0| > \sqrt{0.6} \approx 0.775$$

Estimation

Moderne signalbehandling udføres oftest ved hjælp af digital hardware, hvilket giver en lang række muligheder for at udføre meget præcis og avanceret signalbehandling. Derfor anvendes i stigende grad algoritmer, hvor en række signalkarakteristika estimeres ud fra de forelagte signaler, og behandlingen indrettes så efter de estimerede karakteristika. I dette kapitel gives en indledning til nogle af disse estimationsalgoritmer. I afsnit 7.1 introduceres forskellige signalmål, der kan anvendes til at give et enkelt tal for indgangssignalet eller et afledt signal. Dette kan bl.a. benyttes ved vurdering af en adaptiv signalbehandling. I afsnit 7.2 omtales en metode til estimation af effektspektret fra et stokastisk digitalt signal. Endelig omtales i afsnit 7.3 parametriske modeller og deres beregning ud fra et foreliggende signal. Disse modeller danner grundlag for den adaptive filtrering og modellering af f.eks. talesignaler.

7.1 Signalmål

Ved mange tekniske anvendelser er det nyttigt at kunne karakterisere et forelagt signal ved hjælp af et enkelt tal. Dette tal kan enten være et sammenfattende udtryk for en eller nogle bestemte egenskaber ved signalet eller blot en angivelse af, om signalet kan henføres til en given mængde. Et sådant tal kan kaldes et simpelt signalmål. Fastlæggelsen af et simpelt signalmål for et forelagt signal indebærer normalt en eller anden signalbehandling på signalet, som resulterer i det tal, der benyttes til klassifikationen af signalet.

De mest benyttede simple signalmål har nært slægtskab med det matematiske begreb ”norm”. 2-normen af et signal med endelig energi er således kvadratroden af signalets energi. Af de mulige normer er specielt 2-normen af interesse, da den på enkel vis hænger sammen med signalets spektrale beskrivelse.

Den kendsgerning, at også f.eks. spektralanalyse er baseret på simple signalmål, skulle gøre det rimeligt at omtale de grundbegreber og fejlkilder, som optræder ved realiseringen af den signalbehandling, der ligger til grund for de simple signalmål.

7.1.1 p -normen som simpelt signalmål

Langt de hyppigst benyttede simple signalmål er baseret på p -normen af signalet. Den almindelige definition på p -normen af et analogt signal $g(t)$ er

$$\|g(t)\|_p = \left[\int_T |g(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (7.1)$$

hvor T er et passende valg - muligvis uendeligt - interval (og $p \geq 1$). Tilsvarende er p -normen for et digitalt signal $g(n)$ givet ved

$$\|g(t)\|_p = \left[\sum_N |g(n)|^p \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (7.2)$$

I dette udtryk er N det antal signalværdier, der summeres over. Bemærk, at p -normen altid er ≥ 0 .

Blandt p -normerne er der specielt interesse for de tre tilfælde $p = 1, 2$ og ∞ .

$p = \infty$. Denne norm er identisk med den numerisk største værdi (spidsværdien), det pågældende signal antager inden for et interval af længden T eller N . Den har naturligvis bl.a. praktisk betydning ved fastlæggelse af signalbehandlingsudstyrs udstyringsområde.

$p = 2$. Som det kan ses af udtrykkene ovenfor, indgår kvadratet på 2-normen i et periodisk signals effekt og i beregningen af energien for signaler med endelig energi (se f.eks. afsnit 2.4). 2-normens anvendelighed i praksis beror blandt andet på, at denne norm på simpel vis også kan beregnes i frekvensdomænet (Parsevals formler).

$p = 1$. Interessen for et signals 1-norm stammer formentlig fra, at det er relativt enkelt at konstruere apparater, som kan måle denne norm, i hvert fald når det gælder periodiske og stokastiske signaler. 1-normen indgår i udtrykket for et signals ensrettede middelværdi.

For analoge signalers p -normer gælder "trekantsuligheden"

$$\|g_1(t) + g_2(t)\|_p \leq \|g_1(t)\|_p + \|g_2(t)\|_p. \quad (7.3)$$

Tilsvarende udtryk findes for digitale signaler.

Såfremt man kun betragter intervaller med endelig længde T - eller signaler med endelig varighed - gælder det, at

$$\left| \int_T |g(t)| dt \right|^2 \leq \int_T |g(t)|^2 dt \int_T dt. \quad (7.4)$$

Dette indses let ved benyttelse af Schwarz' ulighed (se appendix B). Endvidere er

$$\int_T |g(t)|^2 dt \leq T [\max |g(t)|]^2. \quad (7.5)$$

Disse to uligheder kan sammenfattes til

$$\|g(t)\|_1 \leq \sqrt{T} \|g(t)\|_2 \leq T \|g(t)\|_\infty. \quad (7.6)$$

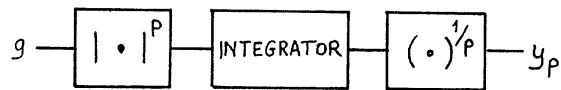
For digitale signaler gælder tilsvarende

$$\|g(n)\|_1 \leq \sqrt{N} \|g(n)\|_2 \leq N \|g(n)\|_\infty. \quad (7.7)$$

Signalbehandling i udtrykket for p -normen

Beregningen af et signals p -norm indebærer en integration, når signalet er analogt, eller en summation hvis det er digitalt. Herudover indgår opløftning af signalet til p 'te potens samt den p 'te rod i udtrykket.

De signalmæssige konsekvenser heraf kan det ofte være nyttigt at klargøre, da man herved kan erhverve en dybere indsigt i det simple signalmåls struktur. Ud fra denne indsigt er det bl.a. muligt at vurdere alternative muligheder til realisationen af praktiske måleopstillinger, hvori en p -norm indgår.



Figur 7.1: Signalbehandling for uddragning af den p 'te norm.

Såfremt T eller N er endelige størrelser, kan man omforme udtrykkene for p -normen til

$$y_p(t) = \left[\int_{t-T}^t |g(\theta)|^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}} \quad (7.8)$$

og

$$y_p(n) = \left[\sum_{q=n-N+1}^n |g(q)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (7.9)$$

Signalbehandlingen består altså af såvel lineære som ikke-lineære elementer, og den kan sammenfattes i blokdiagrammet på figur 7.1.

Det er i det almene tilfælde meget svært at redegøre for de signalmæssige konsekvenser af at opløfte den numeriske værdi af et signal til p 'te potens. Kun hvis $P = 2$ - og numerisk-tegnet derfor uden praktisk betydning - er problemet nogenlunde enkelt.

For ikke-stokastiske signaler kan man benytte sig af foldningsreglen, som giver

$$g^2 \leftrightarrow G * G. \quad (7.10)$$

Normalt er her altså tale om en båndbreddeforøgelse for signalet, som bearbejdes.

Den lineære del af signalbehandlingen udgøres af integrationen, idet man som bekendt kan opfatte integration - eller summation - som en lavpasfiltrering af signalet fra første blok i blokdiagrammet¹

Båndbredden af filtret bliver mindre, jo større N og T er. Det bevirker, at den ovenfor omtalte båndbreddeforøgelse normalt ikke "slår igennem" til y_p .

Også den p -te rod af det positive udgangssignal fra integratoren er signalmæssigt ubehagelig at behandle for alle $p > 1$. Som det vil fremgå af det følgende, er der imidlertid ofte enten ikke behov for denne ikke-lineære signalbehandling (f.eks. ved effekt- eller energibestemmelse), eller den kan med godt resultat tilnærmes på enkel vis. Grunden hertil er, at signalet fra integratoren ofte har en ikke ubetydelig DC-komponent.

Afsluttes integrationen eller summationen i udtrykket for p -normen af signalet til tiden $t = t_0$ eller $n = n_0$, har man altså

$$\|g(t)\|_p = y_p(t_0) \quad \text{og} \quad \|g(n)\|_p = y_p(n_0). \quad (7.11)$$

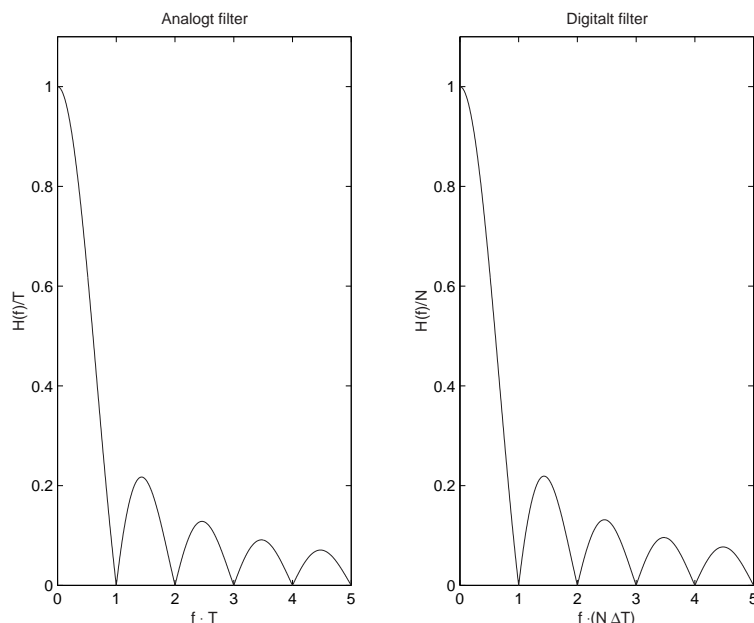
Den ønskede værdi af p -normen er således y_p 's værdi til et bestemt tidspunkt.

7.1.2 Signalmål baseret på 2-normen

2-normen af et signal er basis for flere vigtige simple signalmål. Det gælder således et signals energi

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt, \quad E_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g^2(n), \quad (7.12)$$

¹Bemærk, at forstærkningen i integratoren, som den benyttes her, er proportional med T eller N , se også figur 7.2.



Figur 7.2: Overføringsfunktionen af lavpasfiltret for integrationen.

periodiske signalers effekt og RMS-værdi

$$\begin{aligned}
 P_g &= \frac{1}{T} \int_T g^2(t) dt, \\
 P_g &= \frac{1}{N} \sum_N g^2(n), \\
 \text{RMS}(g) &= \sqrt{P_g}, \tag{7.13}
 \end{aligned}$$

hvor T og N er perioden for de pågældende signaler (se kap. 2), samt ergodiske stokastiske signalers effekt og RMS-værdi

$$\begin{aligned}
 P_x &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_{T_1} x^2(t) dt, \\
 P_x &= \lim_{N_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{N_1} \sum_{N_1} x^2(n), \tag{7.14} \\
 \text{RMS}(x) &= \sqrt{P_x},
 \end{aligned}$$

(se kap. 5).

Medens $E_g = \|g\|_2^2$, har man for periodiske signaler, at

$$P_g = \frac{1}{T} \|g(t)\|_2^2 \quad \text{og} \quad P_g = \frac{1}{N} \|g(n)\|_2^2 \tag{7.15}$$

hvorimod der for stokastiske signaler indgår en grænseværdioperation. Der vil senere blive gjort rede for, at man også kan benytte udtrykket med grænseovergangen på periodiske signaler, samt at man i praksis aldrig lader T blive uendelig stor, men blot passende stor, når der er tale om stokastiske signaler.

I det følgende vil kun signalmålenes effekt og RMS-værdi blive behandlet.

Periodiske signalers effekt og RMS-værdi

Er $g(t)$ et periodisk analogt signal med periodetiden T , og er

$$g(t) \xleftrightarrow{T} G(m), \quad (7.16)$$

er signalets effekt P_g givet ved

$$P_g = \frac{1}{T} \int_T g^2(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |G(m)|^2. \quad (7.17)$$

Indføres i det første udtryk de løbende grænser for integralet (se kap. 7.1.1), får man

$$p(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t g^2(\theta) d\theta. \quad (7.18)$$

Eftersom signalet

$$g^2(t) \xleftrightarrow{T} \sum_{q=-\infty}^{\infty} G(q)G(m-q) \quad (7.19)$$

også er periodisk med periodetiden T , og da dette signal således kun har spektrale komponenter ved de diskrete frekvenser k/T , hvor k er hel, indsættes det let, at $p(t)$ er et DC-signal (se også eksemplet på figur 7.3). Størrelsen af denne DC-komponent kan let findes af foldningsudtrykket ovenfor for $m = 0$.

For digitale periodiske signaler $g(n)$ med perioden N og

$$g(n) \leftrightarrow G(m) \quad (7.20)$$

kan samme fremgangsmåde føre til lignende resultater. Man får

$$P_g = \frac{1}{N} \sum_N g^2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} |G(m)|^2 \quad (7.21)$$

og

$$p(n) = \frac{1}{N} \sum_{q=n-N+1}^n g^2(q). \quad (7.22)$$

Også her er $p(n)$ et DC-signal, og figur 7.3 finder - i princippet - også anvendelse i dette tilfælde.

Beregningen af det periodiske signals RMS-værdi giver ikke anledning til signaltekniske overvejelser, da $p(t)$ og $p(n)$ er konstante, hvorfor

$$\text{RMS}(g) = \sqrt{P_g}. \quad (7.23)$$

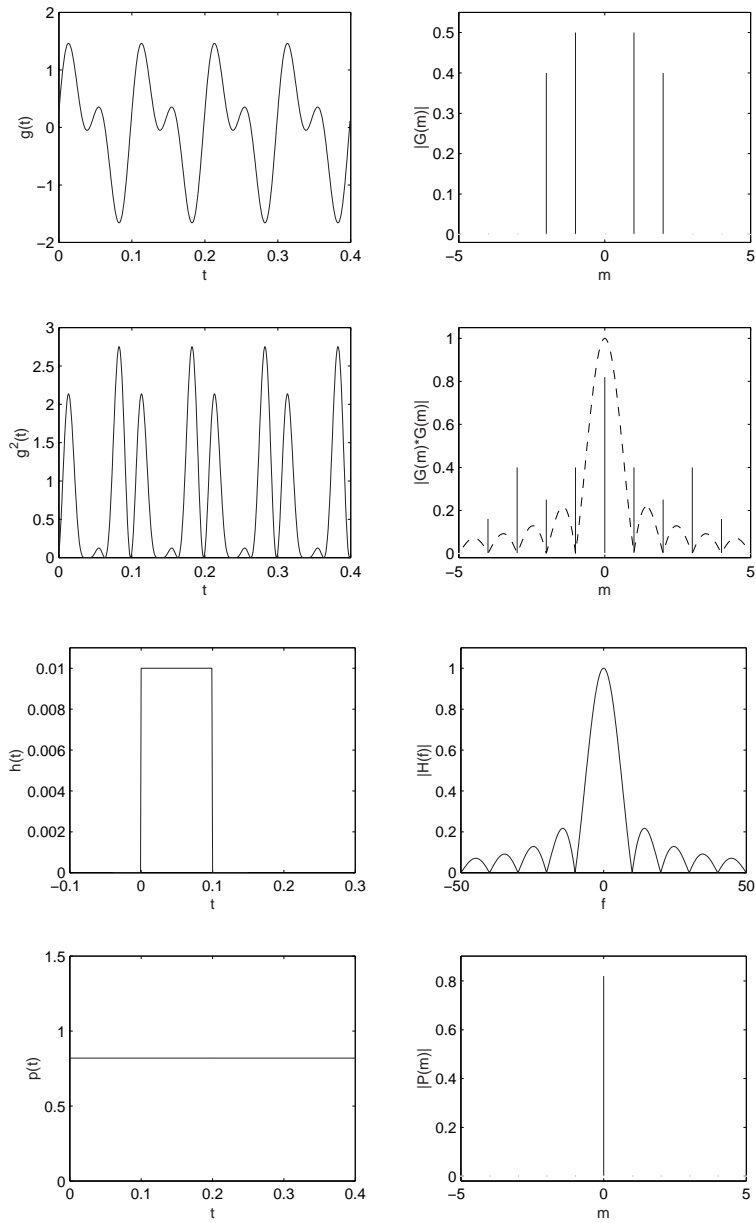
Som det fremgår af udtrykkene for P_g og $\text{RMS}(g)$, indgår periodetiden i beregningen. Dette er upraktisk, når periodetiden ikke kendes. I praksis ved man imidlertid ofte noget om periodetidens omtrentlige værdi eller i det mindste en øvre grænse for den, og det betyder, at det er muligt at vælge en integrationstid ved effekt- eller RMS-værdibestemmelsen, så fejlen bliver vilkårligt lille.

Kaldes integrationstiden T_1 , og udtrykker man

$$T_1 = (q + \varepsilon)T, \quad (7.24)$$

hvor q er hel og positiv, og $0 < \varepsilon < 1$, ses det let, at

$$\frac{1}{T_1} \int_{T_1} g^2(t) dt = \frac{1}{T_1} \int_{qT} g^2(t) dt + \frac{1}{T_1} \int_{\varepsilon T} g^2(t) dt, \quad (7.25)$$



Figur 7.3: Signaler for bestemmelse af periodisk signals effekt.

som igen kan omformes til

$$\frac{q}{q+\varepsilon} \frac{1}{qT} \int_{qT} g^2(t) dt + \frac{1}{q+\varepsilon} \frac{1}{T} \int_{\varepsilon T} g^2(t) dt. \quad (7.26)$$

Værdien af det sidste delintegral er afgrænset af

$$0 \leq \frac{1}{T} \int_{\varepsilon T} g^2(t) dt \leq P_g \quad (7.27)$$

således, at man for ε nær 0 og med delintegralets værdi nær P_g får en øvre grænse for det oprindelige integral. Tilsvarende vil ε nær 1 og den antagelse, at delintegralet er nær 0, få en nedre grænse, således at man kan skrive

$$\frac{q}{q+1} P_g < \frac{1}{T_1} \int_{T_1} g^2(t) dt < \frac{q+1}{q} P_g. \quad (7.28)$$

På figur 7.4 er vist den største fejl svarende hertil gældende for et vilkårligt periodisk signal. Endvidere er der givet en tilsvarende grænse for det tilfælde, at $g(t)$ er rent sinusformet.

Lader man q vokse ud over alle grænser, fremkommer

$$P_g = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_{T_1} g^2(t) dt. \quad (7.29)$$

Et periodisk signals effekt - og dermed RMS-værdi - kan altså også findes ved anvendelse af de udtryk, der gælder for stokastiske signaler.

Ovenstående regninger lader sig selvfølgelig gennemføre for digitale periodiske signaler med tilsvarende resultater. Udtrykkes disse resultater for RMS-værdierne, fås altså

$$\left(\frac{q}{q+1}\right)^{\frac{1}{2}} \text{RMS}\{g(n)\} < \left[\frac{1}{N_1} \sum_{N_1} g^2(n)\right]^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{q+1}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \text{RMS}\{g(n)\} \quad (7.30)$$

og

$$\text{RMS}\{g(n)\} = \left(\lim_{N_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{N_1} \sum_{N_1} g^2(n)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.31)$$

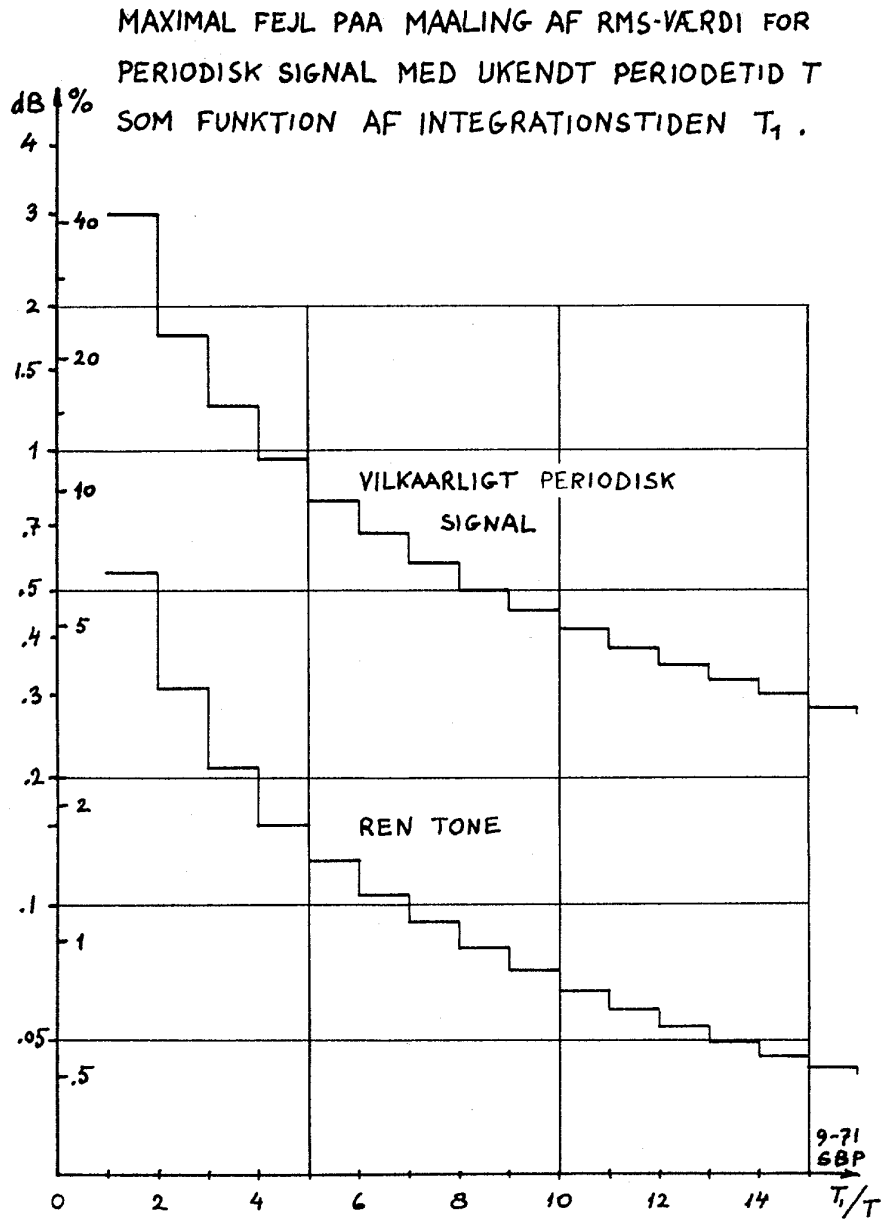
hvor $N_1 = qN + v$ og $0 \leq v \leq N - 1$.

Det er naturligvis muligt at betragte ovenstående problemstilling i frekvensdomænet, og sådanne betragtninger viser på enkel måde, at signalbehandlingens integrator vil kunne erstattes med andre former for lavpasfiltrering.

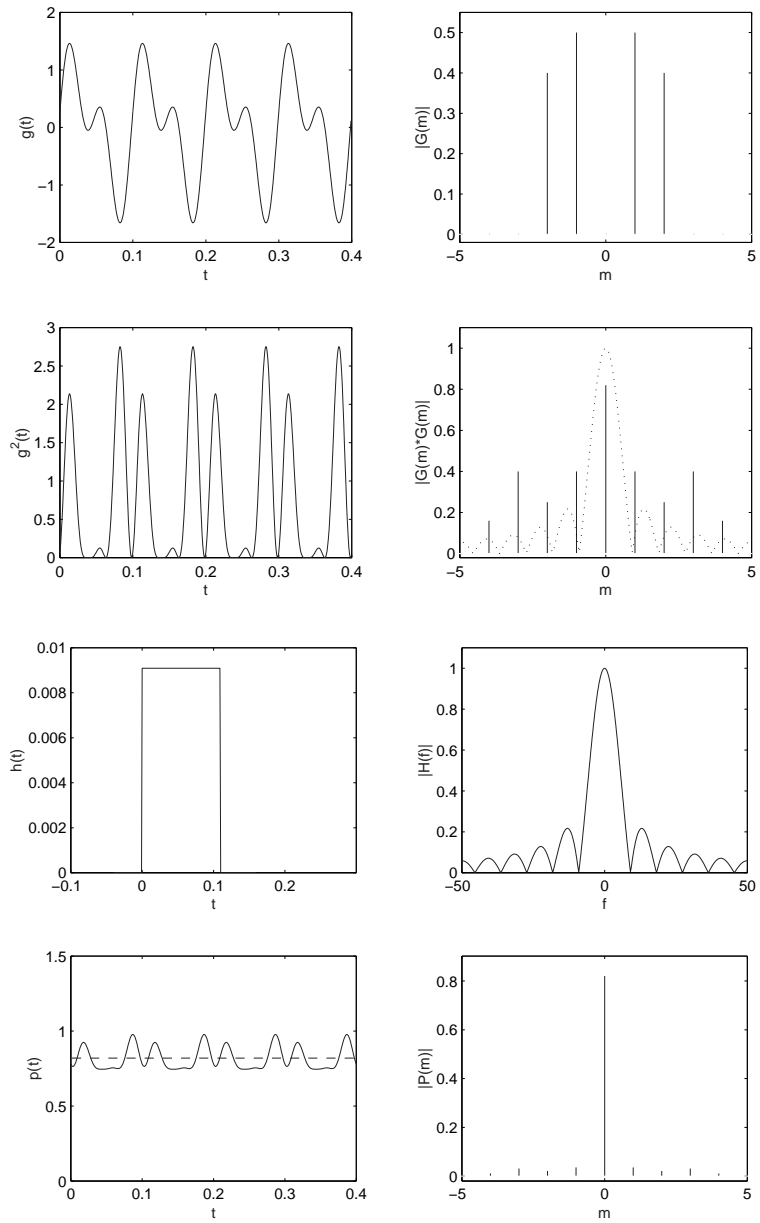
Som det kan ses på figur 7.3, har integratoren til denne anvendelse den uhyre fordel, at dens overføringsfunktion har nulpunkter ved alle hele multipla af $1/T$ på nær ved $f = 0$. Dette filter fjerner således alle højere harmoniske af signalet komplet, når integrationstiden er den samme som periodetiden for signalet - eller et helt multiplum heraf.

Er det ikke muligt at tilpasse disse to tider til hinanden, vil udgangssignalet fra integratoren foruden den DC-værdi, som skal bestemmes, også indeholde andre frekvenskomponenter i større eller mindre omfang, og af disse vil den med frekvensen $1/T$ normalt være den dominerende (se eksemplet på figur 7.5).

Da man i praksis standser integrationen på et tidspunkt, som ikke influeres af $g(t)$'s størrelse, kan man altså risikere en fejl i bestemmelse på P_g omtrent svarende til størrelsen af signalet $g^2(t)$'s 1.harmoniske



Figur 7.4: Maximal fejl på måling af RMS-værdi for periodiske signal med ukendt periodetid T som funktion af integrationstiden T_1 .



Figur 7.5: Signaler for bestemmelse af periodisk signals effekt med fejlagtig periodetid T_1 .

multipliseret med filtrets forstærkning (dæmpning) ved denne frekvens. Øges integrationstiden T_1 , formindskes integratorens båndbredde, og dermed øges dens dæmpning groft set tilsvarende med mindre fejl i bestemmelsen af P_g til følge.

Kravet til det lavpasfilter, som indgår i opstillingen, er da 1) forstærkningen 1 ved $f = 0$ og 2) en passende lav øvre grænsefrekvens set i relation til den reciprokke periodetid fra signalet. Som eksempler på anvendte filtre kan nævnes RC-lavpasfiltret, 1.ordens digitalt filter og drejespoleinstrumentet. Hvad det sidstnævnte filter angår, får man direkte mulighed for at iagttage et signal svarende til $p(t)$ (viserbevægelserne). Et forhold, som må tages i betragtning, når integratoren ikke bruges som lavpasfilter ved beregningen af effekten eller RMS-værdien, er det anvendte filters indsvingningstid, altså den tid der går, før stationære forhold optræder i opstillingen.

Det er ikke enkelt at vurdere den fejl, der kan optræde ved brug af andre typer af lavpasfiltre. Som grov regel kan man dog også her antage, at det er 1.harmoniske for det kvadrerede signal, som er hovedårsagen til de optrædende fejl, og det er derfor filtrets dæmpning af denne komponent, som er betydningsfuld.

Stokastisk signals effekt og RMS-værdi

I det følgende betragtes kun et ergodisk stokastisk signal $x(t)$ med den sædvanlige beskrivelse omfattende sandsynlighedstæthedsfunktioner og deraf afledede middelværdier, herunder autokorrelationsfunktion og effektspektrum.

Denne beskrivelse giver selvfølgelig mange muligheder for bestemmelse af signalets effekt og RMS-værdi, og de vigtigste skal nævnes her.

Er signalets endimensionale sandsynlighedstæthedsfunktion $w_x(\xi)$, er dets effekt

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 w_x(\xi) d\xi. \quad (7.32)$$

Endvidere har man

$$P_x = R_x(0), \quad (7.33)$$

hvor R_x er signalets autokorrelationsfunktion. For analoge signaler er dette udtryk ækvivalent med

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df, \quad (7.34)$$

hvor $S_x(f)$ er signalets effekttæthedsspektrum. Udtrykket har for digitale signaler formen

$$P_x = \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} S_x(f) df. \quad (7.35)$$

For yderligere detaljer henvises til afsnit 5.1.

For både analoge og digitale signaler er som sædvanlig

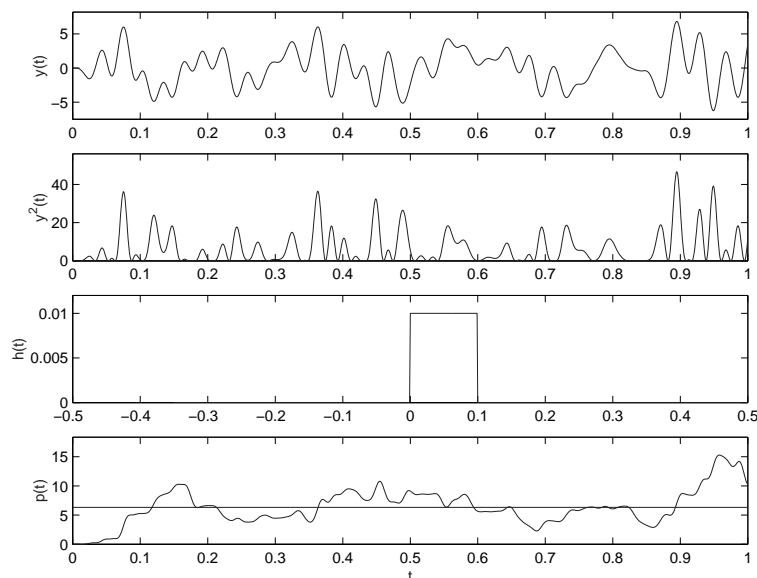
$$\text{RMS}(x) = \sqrt{P_x}. \quad (7.36)$$

Det er i kap. 7.1.2 anført, at et stokastisk signals effekt kan beregnes direkte ud fra signalet efter følgende udtryk

$$P_x = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_{T_1} x^2(t) dt, \quad P_x = \lim_{N_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{N_1} \sum_{N_1} x^2(n). \quad (7.37)$$

På grund af grænseovergangen er disse formler ikke brugbare i praksis, men må erstattes af

$$p(t) = \frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t x^2(\theta) d\theta \quad (7.38)$$



Figur 7.6: Signaler ved effektbestemmelse for stokastisk signal.

og

$$p(n) = \frac{1}{N_1} \sum_{n-N_1+1}^n x^2(q), \quad (7.39)$$

hvor der er indført løbende grænser for integration og summation (se også kap. 7.1.1). Dette betyder, at man ikke ved effektbestemmelsen får tallet P_x , men et stokastisk signal $p(t)$ eller $p(n)$, hvis værdi til det tidspunkt, bestemmelsen af P_x ønskes, er en stokastisk variabel. Følgen af at udelade grænseovergangen er derfor, at man må regne med en usikkerhed på effektbestemmelsen.

Af de ovenfor givne udtryk for $p(t)$ får man let

$$E\{p(t)\} = E\left\{\frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t x^2(\theta) d\theta\right\} = E\{x^2(t)\} = P_x, \quad (7.40)$$

og for $p(n)$

$$E\{p(n)\} = E\left\{\frac{1}{N_1} \sum_{q=n-N_1+1}^n x^2(q)\right\} = E\{x^2(n)\} = P_x. \quad (7.41)$$

$p(t)$'s eller $p(n)$'s DC-værdi er altså den størrelse, som har betydning ved effektbestemmelsen (jævnfør forholdene ved effektbestemmelse for periodiske signaler).

Som det vil kunne ses af eksemplet på figur 7.6, består signalet $p(t)$ eller $p(n)$ foruden af den konstante værdi P_x også af en varierende del. Størrelse af denne sidstnævnte del kan findes på følgende måde.

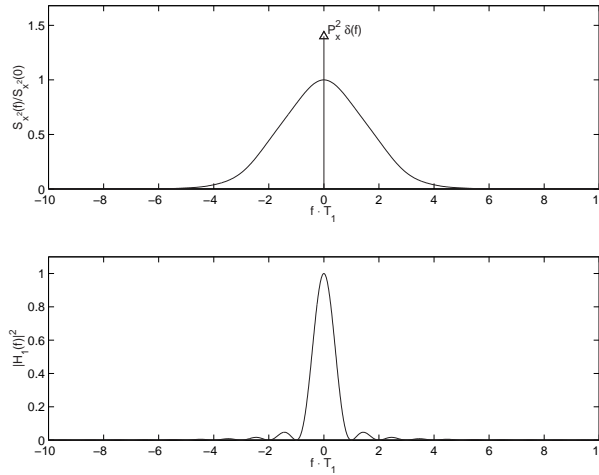
Det stokastiske signal $p(t)$'s effekt P_p kan udtrykkes på formen

$$P_p = \int_{-\infty}^{\infty} S_p(f) df, \quad (7.42)$$

hvor $p(t)$'s effekttæthedsspektrum $S_p(f)$ er givet ved

$$S_p(f) = S_{x^2}(f) |H_1(f)|^2. \quad (7.43)$$

I dette udtryk er $S_{x^2}(f)$ effekttæthedsspektret for signalet $x^2(t)$ og $H_1(f)$ overføringsfunktionen for den analoge integrator.



Figur 7.7: Spektrum for kvadreret stokastisk signal.

Effekten $\sigma^2\{p(t)\}$ af $p(t)$'s varierende del kan da beregnes af

$$\sigma^2\{p(t)\} = P_p - E^2\{p(t)\} \quad (7.44)$$

som reduceres til

$$\sigma^2\{p(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x^2}(f) |H_1(f)|^2 df - P_x^2. \quad (7.45)$$

I de fleste praktiske tilfælde varierer $S_{x^2}(f)$ kun lidt i sammenligning med $|H_1(f)|^2$. Benytter man sig yderligere af, at $S_{x^2}(f)$ har en δ -funktion for $f = 0$ af styrken P_x^2 ($x^2(t)$'s DC-værdi), kan man med god tilnærmelse skrive

$$\sigma^2\{p(t)\} \approx S_{x^2}(0) \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(f)|^2 df, \quad (7.46)$$

hvor $S_{x^2}(0)$ ikke omfatter δ -funktionen. Man får (Parseval)

$$\sigma^2\{p(t)\} \approx \frac{S_{x^2}(0)}{T_1} \quad (7.47)$$

Sætter man $\sigma\{p(t)\}$ i forhold til $E\{p(t)\}$, får man et udtryk for den relative usikkerhed, som bestemmelsen af P_x er behæftet med, dvs.

$$\frac{\sigma\{p(t)\}}{E\{p(t)\}} \approx \left(\frac{S_{x^2}(0)}{P_x^2} \frac{1}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.48)$$

En lille usikkerhed fås altså, når T_1 er stor.

Man kan gennemføre tilsvarende regninger for det digitale signal $p(n)$. Slutresultatet bliver

$$\frac{\sigma\{p(n)\}}{E\{p(n)\}} \approx \left(\frac{S_{x^2}(0)}{P_x^2} \frac{1}{N_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.49)$$

En yderligere reduktion af disse udtryk er kun mulig, når der gøres antagelser om signalet x . Antages det derfor, at $x(t)$ - eller $x(n)$ - er et gaussisk signal, vil man i det analoge tilfælde kunne skrive, at (se afsnit 5.7.3)

$$S_{x^2}(f) = P_x^2 \delta(f) + 2S_x(f) * S_x(f), \quad (7.50)$$

hvor $S_x(f)$ er effekttæthedsspektret for $x(t)$ (se afsnit 5.7.6). Heraf fås

$$S_{x^2}(0) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(f) df. \quad (7.51)$$

Indføres i dette udtryk begrebet signalet $x(t)$'s ækvivalente statistiske båndbredde B_s givet ved

$$B_s = \frac{P_x^2}{2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(f) df} \quad (7.52)$$

(for yderligere detaljer se appendix F), fremkommer det simple udtryk

$$\frac{\sigma\{p(t)\}}{E\{p(t)\}} \approx \frac{1}{\sqrt{B_s T_1}}. \quad (7.53)$$

Det tilsvarende udtryk for digitale signaler bliver

$$\frac{\sigma\{p(n)\}}{E\{p(n)\}} \approx \frac{1}{\sqrt{B_s N_1 \Delta T}}, \quad (7.54)$$

idet

$$B_s = \frac{2f_g P_x^2}{2 \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} S_x^2(f) df} \quad (7.55)$$

Af disse beregninger fremgår det, at det er produktet af integrationstiden og signalets ækvivalente statistiske båndbredde, som er bestemmende for nøjagtigheden på beregningen af signalets effekt P_x .

Den tidsvarierende del af $p(t)$ - eller $p(n)$ - vil, når produktet $B_s T_1$ er stort, være omtrent gaussfordelt med middelværdien 0, da integratorens båndbredde så er lille sammenlignet med B_s . Er $B_s T_1$ lille, afhænger fordelingen af $p(t)$'s - eller $p(n)$'s øjebliksværdier af den tilsvarende fordeling af $x(t)$ - eller $x(n)$ - .

I praksis kan man med god tilnærmelse benytte en passende normeret X^2 -fordeling med et antal frihedsgrader på $2T_1 B_s$ som erstatning for fordelingen af p 's øjebliksværdier. På figur 7.8 ses 90% og 99% sikkerhedsgrænser optegnet for en X^2 -fordeling som funktion af $2T_1 B_s$.

Af samme grunde, som er anført i kap. 7.1.2, kan man undertiden med fordel benytte andre lavpasfiltre i stedet for integratoren ved effektbestemmelsen. Dette får primært betydning for udtrykket $\overline{\delta^2\{p(t)\}}$, hvor $H_1(f)$ må udskiftes med $H(f)$ svarende til det anvendte filter.

Uanset hvilket lavpasfilter man anvender, vil der ved stokastiske signaler altid være en ikke-konstant del af signalet $p(t)$ - eller $p(n)$ - . Beregningen af RMS-værdien indebærer derfor en ikke-lineær signalbehandling. I praksis kan denne signalbehandling dog på grund af den normalt store DC-komponent i $p(t)$ - $p(n)$ - tilnærmes med en lineær signalbehandling, idet man benytter det sædvanlige udtryk

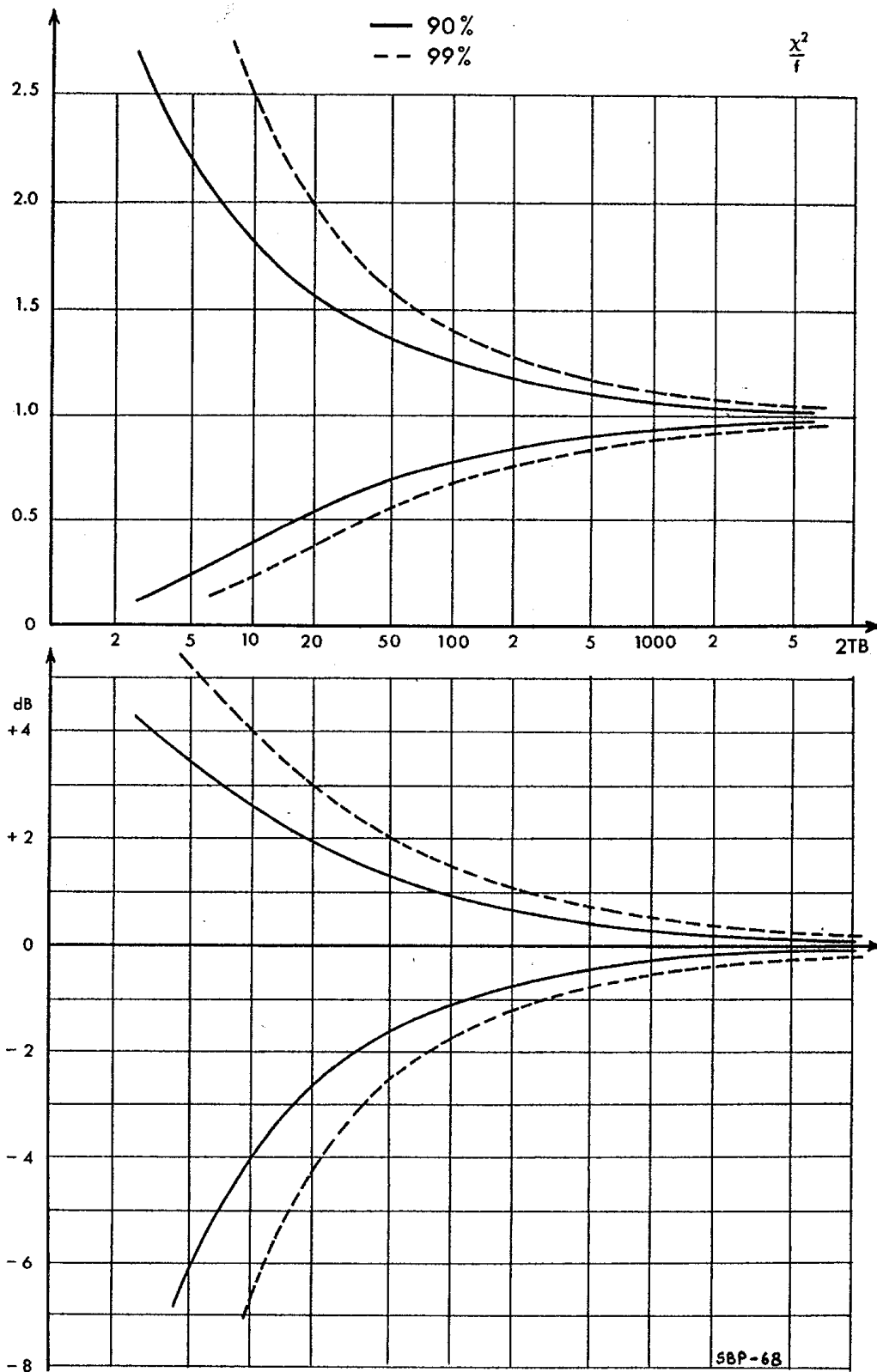
$$\sqrt{1+v} \approx 1 + \frac{1}{2}v, \quad (7.56)$$

hvis v er lille i forhold til 1. Tilnærmelsen er i denne sammenhæng rimelig for $v < 0.4$. Konsekvenserne heraf bliver da, at

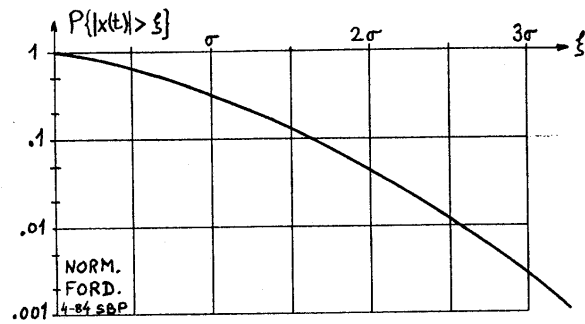
$$\sigma^2\{\sqrt{p(t)}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma^2\{p(t)\}. \quad (7.57)$$

Sikkerhedsgrænserne på figur 7.8 kan stadig finde tilnærmet anvendelse, når de aflæste størrelser justeres i overensstemmelse med udtrykket ovenfor.

Sikkerhedsgrenser



Figur 7.8: Sikkerhedsgrenser.



Figur 7.9: Sandsynligheden for at $|x(t)| > \xi$ for en normalfordeling.

7.1.3 Signalmål baseret på ∞ -normen

Topværdien af et signal er den numerisk største værdi, signalet antager i det - muligvis uendelige - interval, man betragter signalet. Topværdien har som tidligere nævnt betydning for dimensionering af de elektroniske kredsløb, som signalet kan passere.

Såfremt man skal kunne skønne en øvre grænse for topværdiens størrelse, må man enten vide noget om den mekanisme, som genererer signalet, eller man må forudsætte noget som signalets båndbredde.

For båndbegrænsede signaler med endelig energi kan det vises, at signalets topværdi

$$\|g\|_{\infty} \leq \sqrt{2E_g f_{\phi}}, \quad (7.58)$$

hvor E_g er signalets energi, og f_{ϕ} er signalets øvre grænsefrekvens. Udtrykket gælder også digitale signaler med endelig energi.

Er der tale om periodiske signaler - analoge eller digitale - får udtrykket formen

$$\|g\|_{\infty} \leq \sqrt{P_g(2M + 1)}, \quad (7.59)$$

hvor P_g er signalets effekt, og M er den største værdi af frekvensparametren, hvor signalet har frekvenskomponenter, som er forskellig fra nul.

Et stokastisk signals topværdi kan findes ud fra kendskab til signalets sandsynlighedstæthedsfunktion $W(\xi)$. Er ξ defineret på et uendeligt interval, er signalets topværdi ∞ - stor, men denne værdi antages naturligvis uhyre sjældent. Sandsynligheden for at få signalværdier større end værdien a kan beregnes af

$$\int_{-\infty}^{-a} w(\xi) d\xi + \int_a^{\infty} w(\xi) d\xi. \quad (7.60)$$

Figur 7.9 viser denne sandsynlighed for et normalt fordelt signal.

I den tekniske litteratur træffer man undertiden på begrebet topfaktor (engelsk: crest factor), der er defineret som

$$\theta = \frac{\|g\|_{\infty}}{\text{RMS}\{g\}}, \quad (7.61)$$

hvor $\text{RMS}(g)$ er effektværdien af signalet.

7.2 Spektralestimation

I mange anvendelser er det ønskeligt at kunne bestemme effekttæthedsspektret for et målt signal. Hvis der ikke findes nogen forudgående oplysninger må effekttæthedsspektret estimeres ud fra de målte data. For en begrænset observationstid vil et sådant estimat være behæftet med en usikkerhed udtrykt ved dets varians og bias. I dette afsnit beregnes disse, når der benyttes en simpel metode til spektralestimation.

Et stationært stokastisk signal beskrives ved hjælp af dets autokorrelationsfunktion. Den er for et ergodisk signal:

$$R_x(\tau) = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t + \tau)dt \quad (7.62)$$

og det tilsvarende effekttæthedsspektrum er

$$P_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau \quad (7.63)$$

Et signal kan kun observeres over en endelig tid, og derfor kan kun beregnes et estimat af autokorrelationen. Dette svarer til at multiplicere et rektangulært vindue på signalet. Oftest udføres beregningen af autokorrelationen ved hjælp af digitale signaler, og estimatet er her

$$\hat{R}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n)x(k+n)w(k+n) \quad (7.64)$$

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \quad (7.65)$$

hvor $w(n)$ er vinduesfunktionen, og N er antallet af samples til rådighed. Et estimat af effektspektret er givet ved

$$\hat{P}_x(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}_x(k) \exp(-j2\pi f k \Delta T) \quad (7.66)$$

Ved direkte beregning af autokorrelationen kræves en mængde beregninger foruden den diskrete fouriertransformation. En måde til at reducere antallet af beregninger er at beregne effektspektret direkte ved at lave en fouriertransformation direkte på de målte data. Introduceres

$$\begin{aligned} w(n)x(n) &\leftrightarrow X_w(f) \\ w(-n)x(-n) &\leftrightarrow X_w^*(f) \end{aligned} \quad (7.67)$$

fås

$$\begin{aligned} N\hat{R}_x(k) &= w(k)x(k) * x(-k)w(-k) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n)x(k+n)w(k+n) \leftrightarrow X_w(f) \cdot X_w^*(f) = |X_w(f)|^2 \end{aligned} \quad (7.68)$$

når $x(n)$ er signalet. Et estimat af effektspektret er så

$$\hat{P}_x(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi f n \Delta T) \right|^2 \quad (7.69)$$

eller

$$\begin{aligned} \hat{P}_x(f) &= \frac{1}{N} |X(f)|^2 \\ X(f) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi f n \Delta T) \end{aligned} \quad (7.70)$$

$P_x(f)$ kaldes periodogrammet, når der benyttes en rektangulært vægtning af signalet, og kaldes det modificerede periodogram, når ikke-rektangulære vinduer benyttes.

På grund af det endelige antal samples er det estimerede effektspektrum også stokastiske, og er derfor behæftet med en varians. Beregningen af variansen er besværlig, og derfor gengives kun resultatet her. En udledning kan findes i litteraturen (Jenkins og Watt 1968; Bendat og Piersol 1986; Papoulis 1991; Proakis og Manolakis 1988)

$$\text{Var}[\hat{P}_x(f)] \approx P_x^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f \Delta T N}{N \sin 2\pi f \Delta T} \right)^2 \right] \quad (7.71)$$

Standardafvigelsen er på størrelse med effektspektret, selv for store værdi af f og N . Dette kan forklares ved hjælp af ligning (7.64). For store værdier af k indgår kun ganske få sampleværdier i beregningen af autokorrelationen, og standardafvigelsen på estimatet $\hat{R}_x(k)$ er derfor stor. Effektspektret bestemmes ud fra alle lagværdier, og den store standardafvigelse for visse lagværdier forplanter sig derfor til det estimerede spektrum. En mulig løsning på dette problem er at trunkere autokorrelationen, så der kun benyttes estimerede autokorrelationsværdier med en lav standardafvigelse. Det svarer til at dele signalet op i en række små segmenter, beregne spektrene for disse og derefter midle dem for at opnå et estimeret effektspektrum med lavere varians. Det antages her, at de enkelte segmenter er uafhængige. Hvis data inddeles i L uafhængige segmenter fås en varians på

$$\text{Var}[\hat{P}_x(f)] \approx \frac{1}{L} P_x^2(f) \quad (7.72)$$

Dette kaldes Bartletts metode. En yderligere reduktion i varians på en faktor 2 fås ved at lade de enkelte segmenter overlapse 50 % (Welch 1967). Spektrene for de overlappende segmenter er tilnærmelsesvis statistisk uafhængige, og da der er dobbelt så mange segmenter reduceres variansen med en faktor 2:

$$\text{Var}[\hat{P}_x(f)] \approx \frac{1}{2L} P_x^2(f) \quad (7.73)$$

Dette kræver naturligtvis, at signalet er stationært. Prisen for at få en bedre bestemmelse af effektspektret er, at den spektrale opløsning nedsættes. Ved multiplikation i tidsdomænet med vinduet vil spektralestimatet blive foldet med vinduets fourietransformerede. Herved sker en udglatning af spektralestimatet svarende til bredden af vinduets hovedsløjfe. Beregnes effektspektret for et signal med N samples og anvendes et rektangulært vindue, bliver den spektrale opløsning f_s/N , hvor f_s er signalets samplingfrekvens. Ved 50 % overlap indgår der N/L samples i beregningen, og den spektrale opløsning er

$$\Delta f = \frac{f_s}{N/L} = f_s \frac{L}{N} \quad (7.74)$$

Om estimatet er biased kan findes ud fra middelværdien for $\hat{R}_x(k)$

$$\begin{aligned} E\{\hat{R}_x(k)\} &= E\left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w(n)w(k+n)x(n)x(k+n) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w(n)w(k+n)E\{x(n)x(k+n)\} \\ &= \frac{1}{N} \phi_w(k)R_x(k) \end{aligned} \quad (7.75)$$

$$\phi_w(k) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)w(k+n) \quad (7.76)$$

Den fouriertransformerede er

$$E\{\hat{P}_x(f)\} = \frac{1}{N} \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} \Phi_w(\theta)P_x(f-\theta)d\theta \quad (7.77)$$

hvor $2f_g = f_s$ og

$$\Phi_w(f) = |W(f)|^2 \quad (7.78)$$

og for det rektangulære vindue

$$\Phi_w(f) = |W(f)|^2 = \frac{\sin^2 \pi f N \Delta T}{\sin^2 \pi f \Delta T} \quad (7.79)$$

Periodogrammet er således en udglattet version af det sande effektspektrum og er et biased estimat, da omkringliggende frekvenskomponenter påvirker hinanden. $\Phi_w(f)$ nærmer sig en Dirac deltafunktion for store værdier af N , og da vil $E\{\hat{P}_x(f)\}$ nærmer sig $P_x(f)$. Det indikerer at \hat{P}_x er et asymptotisk centralt estimat af P_x . For andre vinduesfunktioner vil det modificerede periodogram kun nærme sig den sande værdi hvis

$$\frac{1}{2f_g N} \int_{-f_g}^{f_g} \Phi_w(f) df = \frac{1}{2f_g N} \int_{-f_g}^{f_g} |W(f)|^2 df = 1 \quad (7.80)$$

hvilket sikrer at foldningen i (7.77) nærmer sig den sande værdi for store værdier af N . Det sikres, hvis der normaliseres med faktoren

$$E_N = \frac{1}{2f_g N} \int_{-f_g}^{f_g} |W(f)|^2 df = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) \quad (7.81)$$

$$\hat{P}_x(f) = \frac{1}{NE_N} |X_w(f)|^2 \quad (7.82)$$

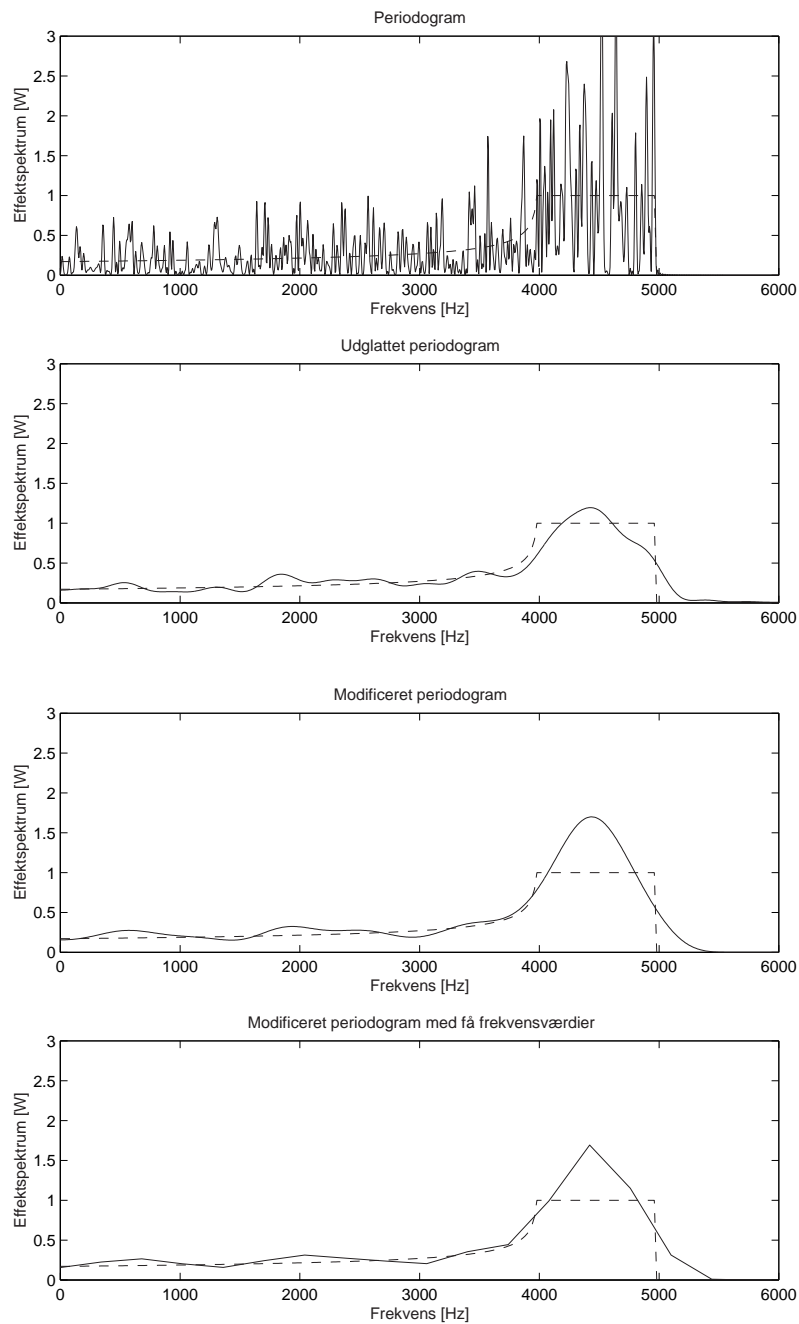
Ved at anvende vinduer med et spektrum koncentreret omkring $f = 0$ og lave sidesløjfer reduceres bias, og der fås et bedre estimat af effektspektret. En vægtning af data vil dog ikke reducere variansen, og det er stadig nødvendigt at dele signalet op i segmenter og midle spektrene beregnet for disse segmenter. Ved en opdeling i L segmenter og 50 % overlap som i Welch's metode reduceres variansen med en faktor $2L$ og estimatet er stadig asymptotisk centralt.

Et eksempel på spektralestimering er vist i figur 7.10. Den øverste graf viser periodogrammet estimeret direkte fra de målte data uden segmentering. Det sande effektspektrum er vist ved den stiplede linie. Det ses, at standardafvigelsen på estimatet er af samme størrelsesorden som resultatet selv. Den næste graf viser resultatet af en opdeling i 16 overlappende segmenter med rektangulær vægtning. I den tredje graf er der benyttet den samme segmentering blot med et Hanning vindue. Reduktionen på standardafvigelsen er tydelig for de to grafer, men på samme tid er den spektrale opløsning reduceret. I visse tilfælde beregnes spektret kun for frekvenserne $m \frac{f_s L}{N}$. Dette er ikke nogen begrænsning i nøjagtigheden af estimatet, da der netop kun er N/L uafhængige komponenter i spektret. Dette er illustreret i den sidste graf, hvor der er beregnet N/L spektrale komponenter.

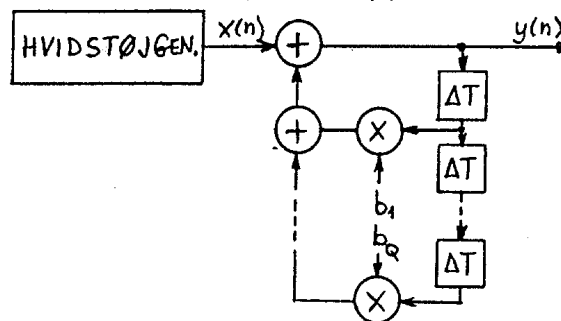
Der kan benyttes forskellige vægtfunktioner under beregningen af det modificerede periodogram, og dette influerer både bias og varians af estimatet. En yderligere diskussion af forskellige vægtfunktioner findes i Papoulis (1991).

7.3 Signalmodellering

Ved visse tekniske anvendelser, hvori der optræder digitale signaler af stokastisk art, er man interesseret i at "modellere" disse signaler, d.v.s. at konstruere "kunstige" stokastiske signaler med samme egenskaber som de forelagte signaler. Denne opgave er generelt særdeles vanskelig, med mindre man er i besiddelse af nøjagtige oplysninger om oprindelsen til det ukendte signal eller er villig til at postulere eller antage eksistensen af sådanne oplysninger.



Figur 7.10: Estimation af effektspektrum. Det sande spektrum er vist ved den stiplede linie. Øverst er vist periodogrammet og de næste graf viser de midlede periodogrammer, når der benyttes et rektangulært og et Hanning vindue. Nederst er spektret beregnet for kun N/L frekvensværdier.



Figur 7.11: AR model generator.

I det følgende skal 2 signalmodeller omtales: den autoregressive model (AR-modellen) og den løbende middelværdimodel (MA-modellen, MA = moving average). Begge modeller kan beskrives ved et antal parametre, hvis størrelse kan beregnes, såfremt man kender autokorrelationsfunktionen for signalet, som skal modelleres. De således konstruerede modeller finder bl.a. anvendelse ved simuleringer af systemer, som producerer signaler.

7.3.1 AR-modellen

En autoregressiv procesgenerator består af digital hvidstøjgenerator med udgangssignalet $x(n)$, $E\{x(n)\} = 0$, efterfulgt af et stabilt og tidsinvariant digitalt filter realiseret rekursivt. Udgangssignalet $y(n)$ fra filtret beregnes derfor af

$$y(n) = x(n) + \sum_{q=1}^Q b_q y(n - q), \quad (7.83)$$

hvor Q er antallet af processens parametre b_q (se figur 7.11). Q benævnes også processens orden.

Overføringsfunktionen for filtret findes på sædvanlig vis

$$H(f) = \frac{1}{1 - \sum_{q=1}^Q b_q \exp(-j2\pi f q \Delta T)}, \quad (7.84)$$

og $y(n)$'s effektspektrum kan da skrives på formen

$$S_y(f) = \sigma_x^2 |H(f)|^2 \quad (7.85)$$

hvor σ_x^2 er hvidstøjgeneratorens effekt (se afsnit 5.7.2).

Da det om $x(n)$ er antaget, at $E\{x(n)\} = 0$, gælder det derfor også, at $E\{y(n)\} = 0$. Som det ses bestemmer filtrets overføringsfunktion formen på signalets effektspektrum.

Det er undertiden interessant at kunne bestemme generatorens konstanter b_q ud fra ønsket om, at $R_y(k)$ får en kendt facon. Multipliceres udgangssignalet fra generatoren med $y(n - k)$, fås

$$y(n)y(n - k) = x(n)y(n - k) + \sum_{q=1}^Q b_q y(n - q)y(n - k). \quad (7.86)$$

Tages her middelværdien, fås

$$R_y(-k) = R_{xy}(-k) + \sum_{q=1}^Q b_q R_y(q-k), \quad (7.87)$$

som idet $R_y(k) = R_y(-k)$, reduceres til

$$R_y(k) = R_{xy}(-k) + \sum_{q=1}^Q b_q R_y(k-q), \quad (7.88)$$

Da $x(n)$ har et hvidt spektrum, er

$$R_x(k) = \sigma_x^2 \delta(k), \quad (7.89)$$

og følgelig er

$$R_{xy}(k) = \sigma_x^2 h(k), \quad (7.90)$$

hvor $h(k)$ er filtrets impulssvar (se afsnit 5.7.1).

Eftersom filtret er kausalt, må $R_{xy}(k) = 0$ for $k < 0$. For $k \geq 1$ reduceres ligningen til

$$R_y = \sum_{q=1}^Q b_q R_y(k-q), k > 0. \quad (7.91)$$

Betragter man udtrykket, når $1 \leq k \leq Q$, ses det, at der er tale om et lineært ligningssystem med Q ubekendte. Dette kan skrives på matrixform

$$Rb = r, \quad (7.92)$$

hvor

$$R = \begin{bmatrix} R_y(0)R_y(-1) & \dots & R_y(1-Q) \\ R_y(1)R_y(0) & \dots & R_y(2-Q) \\ & \dots & \\ R_y(Q-1)R_y(Q-2) & \dots & R_y(0) \end{bmatrix} \quad (7.93)$$

$$b = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_Q]^T. \quad (7.94)$$

og

$$r = [R_y(1), R_y(2), \dots, R_y(Q)]^T. \quad (7.95)$$

Dette ligningssystem kan løses på sædvanlig vis, og man får

$$b = R^{-1}r, \quad (7.96)$$

hvor $R^{-1}r$ er den inverse matrix til R .

Bemærk, at kendskabet til generatorkonstanterne b_q og de første $Q+1$ værdier af $R_y(k)$ giver mulighed for at beregne alle værdier af $R_y(k)$ uden for intervallet $[-Q, Q]$. Såfremt kendskabet til de værdier, som benyttes til bestemmelsen af b_q , stammer fra målinger eller er opstået på anden vis, er der ingen sikkerhed for, at de værdier, som således kan beregnes, vil svare til eventuelle øvrige målte eller forelagte $R_y(k)$ værdier uden for det nævnte interval.

AR-generatorens udgangseffekt P_y kan beregnes af

$$P_y = \frac{1}{2f_g} \int_{2f_g} S_y(f) df = \frac{1}{2f_g} \int_{2f_g} \sigma_x^2 |H(f)|^2 df = \sigma_x^2 \sum_{h=-\infty}^{\infty} h^2(n). \quad (7.97)$$

Da $h(n)$ sædvanligvis ikke kendes, kan man også have glæde af udtrykket

$$R_y(0) = R_{xy}(0) + \sum_{q=1}^Q b_q R_y(q), \quad (7.98)$$

som kan reduceres til

$$P_y = \sigma_x^2 + \sum_{q=1}^Q b_q R_y(q). \quad (7.99)$$

1. ordens AR-procesgenerator

Denne meget enkle AR-procesgenerator fungerer efter

$$y(n) = x(n) + b_1 y(n-1), \quad (7.100)$$

svarende til et første ordens digitalt filter med

$$h(n) = \begin{cases} b_1^n & n > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}, \quad (7.101)$$

(se afsnit 6.4.3).

Med

$$H(f) = \frac{1}{1 - b_1 \exp(-j2\pi f \Delta T)} \quad (7.102)$$

vil effektspektret på generatorens udgang være

$$S_y(f) = \frac{\sigma_x^2}{1 + b_1^2 - 2b_1 \cos 2\pi f \Delta T} \quad (7.103)$$

Generatorens effekt beregnes enklest af

$$P_y = \sigma_x^2 + \sum_{h=0}^{\infty} h^2(n) = \frac{\sigma_x^2}{1 - b_1^2}, \quad (7.104)$$

og, da kun $b_1 \neq 0$, reduceres ligningen til bestemmelse af $R_y(k)$ til

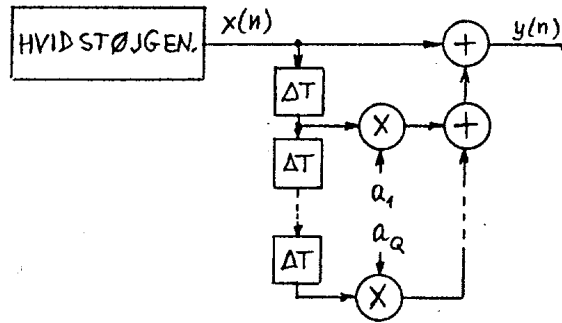
$$R_y(k) = b_1 R_y(k-1), \quad k > 0, \quad (7.105)$$

eller

$$R_y(k) = \frac{\sigma_x^2}{1 - b_1^2} b_1^{|k|} \quad (7.106)$$

Som bekendt er det digitale 1. ordens filter kun stabilt, når

$$|b_1| < 1. \quad (7.107)$$



Figur 7.12: MA model generator.

7.3.2 MA-modellen

En MA-generator består af en digital hvidstøjsgenerator med udgangssignalet $x(n)$, $E\{x(n)\} = 0$, efterfulgt af et stabilt og tidsinvariant digitalt filter af FIR-typen. Udgangssignalet $y(n)$ fra filtret beregnes derfor af

$$y(n) = x(n) + \sum_{q=1}^Q a_q x(n - q), \quad (7.108)$$

hvor Q , som kaldes processens orden, er antallet af procesparametre a_Q .

Filtrets overføringsfunktion $H(f)$ er

$$H(f) = 1 + \sum_{q=1}^Q a_q \exp(-j2\pi f q \Delta T) \quad (7.109)$$

og effektspektret på generatorens udgang findes af

$$S_y(f) = \sigma_x^2 |H(f)|^2, \quad (7.110)$$

hvor σ_x^2 er hvidstøjsgeneratorens effekt.

Også for denne generator gælder det at $E\{y(n)\} = 0$, og det er velkendt, at filtrets impulsvar

$$h(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ a_n, & 1 < n \leq Q, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (7.111)$$

Filtret er altid stabilt, og autokorrelationsfunktionen på filtrets udgang er

$$R_y(k) = \sigma_x^2 h(n) * h(-n). \quad (7.112)$$

Indfører man $a_0 = 1$, er dette ensbetydende med

$$R_y(k) = \begin{cases} \sigma_x^2 \sum_{q=0}^{Q-k} a_q a_{q+k} & |k| \leq Q \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (7.113)$$

Som det ses, er $R_y(k)$ af endelig varighed $2Q + 1$.

1. ordens MA-procesgenerator

Ud fra udtrykket for $y(n)$ i afsnit 7.3.2 fås i tilfældet, hvor $Q = 1$

$$y(n) = x(n) + a_1 x(n-1), \quad (7.114)$$

Den hertil hørende overføringsfunktion er

$$H(f) = 1 + a_1 \exp(-j2\pi f \Delta T), \quad (7.115)$$

og effektspektret på generatorens udgang

$$S_y(f) = \sigma_x^2 (1 + a_1^2 + 2a_1 \cos 2\pi f \Delta T) \quad (7.116)$$

Generatoreffekten fås af

$$P_y = \sigma_x^2 \sum_{h=0}^{\infty} h^2(n) = \sigma_x^2 (1 + a_1^2), \quad (7.117)$$

og autokorrelationen for generatorens udgangssignal

$$R_y(k) = \begin{cases} \sigma_x^2 (1 + a_1^2), & k = 0 \\ \sigma_x^2 a_1, & k = \pm 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (7.118)$$

Såfremt man ønsker at bestemme a_1 ud fra forelagte værdier af $R_y(0)$ og $R_y(1)$, må man løse ligningen

$$\frac{R_y(\pm 1)}{R_y(0)} = \frac{a_1}{1 + a_1^2}. \quad (7.119)$$

Da $y(n)$ er stokastisk må $R_y(\pm 1) < R_y(0)$. Skal ligningen have reelle løsninger, er det let at vise, at man yderligere må kræve, at

$$R_y(\pm 1) \leq R_y(0)/2, \quad (7.120)$$

som indebærer, at $a_1 \leq 1$. Det er altså ikke enhver autokorrelationsfunktion, som kan realiseres med MA-generatoren, når $Q = 1$.

Modulation af signaler

I forbindelse med transmission af signaler gennem luften eller over netværk, er der behov for at modulere det enten analoge eller digitale signal, for at tilpasse det til transmissionsmediet. I dette kapitel gennemgås basale modulationsmetoder for analoge signaler i afsnit 8.1 og for digitale signaler i 8.4. For mere avancerede modulationsformer henvises til speciallitteraturen, f.eks. Stremler (1992), Bissel & Chapman (1992) eller Wade (1994).

8.1 Analoge modulationsformer

Traditionelt er benyttet to forskellige modulationsformer ved transmission af analoge signaler: amplitudemodulation, som er beskrevet i afsnit 8.1.1 og frekven- eller fasemodulation beskrevet i afsnit 8.1.3. Oftest benyttes amplitudemodulationen, hvor der ønskes en prisbillig løsning. Frekvensmodulationen benyttes hvor der lægges vægt på en højere kvalitet, som f.eks. ved FM radio, på bekostning af effektiviteten i båndbreddeudnyttelsen og prisen for udstyret.

8.1.1 Amplitudemoduleret signal

Modulation af en ren tone med et signal anvendes ofte i praksis som et middel til at flytte signalets spektrum på frekvensaksen (måleapparater, teletransmission, radiofoni m.m.)

Betragter man først 2 rene toner $g_1(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1)$ og $g_2(t) = a_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta_2)$, hvor a_1 , a_2 , f_1 , f_2 , θ_1 og θ_2 er konstanter, og hvor forholdet mellem f_1 og f_2 er rationalt, vil man kunne finde produktsignalets spektrum af foldningsreglen

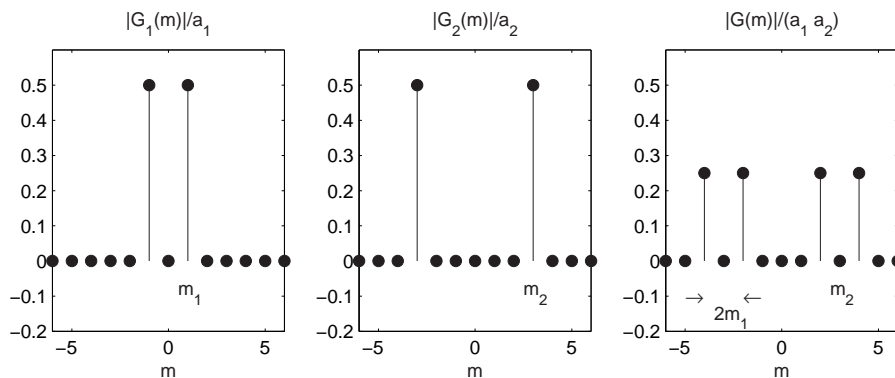
$$g(t) = g_1(t)g_2(t) \xrightarrow{T} G(m) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_1(q)G_2(m-q), \quad (8.1)$$

hvor $g_1(t) \xrightarrow{T} G_1(m)$ og $g_2(t) \xrightarrow{T} G_2(m)$. Da både $G_1(m)$ og $G_2(m)$ kun har to frekvenskomponenter hver, giver foldningen ialt maksimalt 4 spektrale komponenter¹ ved frekvenserne $\pm(f_1 \pm f_2)$, se eksemplet på figur 8.1.

Med $m_1 = f_1 T$ og $m_2 = f_2 T$, bliver resultatet

$$G(m) = \begin{cases} G_1(-m_1)G_2(-m_2) & \text{for } m = -(m_1 + m_2) \\ G_1(m_1)G_2(-m_2) & \text{for } m = m_1 - m_2 \\ G_1(-m_1)G_2(m_2) & \text{for } m = m_2 - m_1 \\ G_1(m_1)G_2(m_2) & \text{for } m = m_1 + m_2. \end{cases} \quad (8.2)$$

¹Såfremt $f_1 = f_2$, kommer der 3 komponenter, og for $f_1 = 0$ kun 2 komponenter.



Figur 8.1: Amplitudemodulation, delspektre.

Da $|G_1(\pm m_1)| = \frac{1}{2}a_1$ og $|G_2(\pm m_2)| = \frac{1}{2}a_2$, ses det let, at

$$|G(m)| = \frac{1}{4}a_1a_2 \quad \text{for} \quad m = \pm(m_1 \pm m_2). \quad (8.3)$$

Er f.eks. a_2 konstant, vil alle $G(m)$'s spektrale komponenter variere med a_1 , såfremt denne størrelse varieres.

Bemærk, at man kan betragte resultatet af produktformationen enten som en flytning af spektret $G_1(m)$ til frekvensen f_2 ($= m_2/T$) eller som en flytning af $G_2(m)$ til frekvensen f_1 ($= m_1/T$).

Lader man nu af bekvemmelighed $a_2 = 1$ og danner signalet

$$g_a(t) = (1 + \mu g_1(t))g_2(t), \quad (8.4)$$

hvor μ er konstant², får dette signal et spektrum, som kan beregnes af

$$G_a(m) = G_2(m) + \mu \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_1(q)G_2(m - q). \quad (8.5)$$

$g_a(t)$ kaldes et amplitudemoduleret (AM) signal, og dets spektrum består dels af spektret $G_2(m)$ - bærebølgen - dels af de tidligere omtalte sum- og differensfrekvenser - sidebåndene. På figur 8.2 ses spektret for 2 amplitudemodulerede signaler, et hvor $f_1 < f_2$ og et hvor $f_1 > f_2$. Også i dette tilfælde vil sidebåndenes styrke variere ved en variation af a_1 , hvorimod bærebølgen er konstant.

Signalets samlede effekt P er summen af bærebølgeeffekten P_b og sidebåndenes effekt P_s , hvor

$$P_b = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{for} \quad P_s = 4 \cdot (\mu a_1/4)^2. \quad (8.6)$$

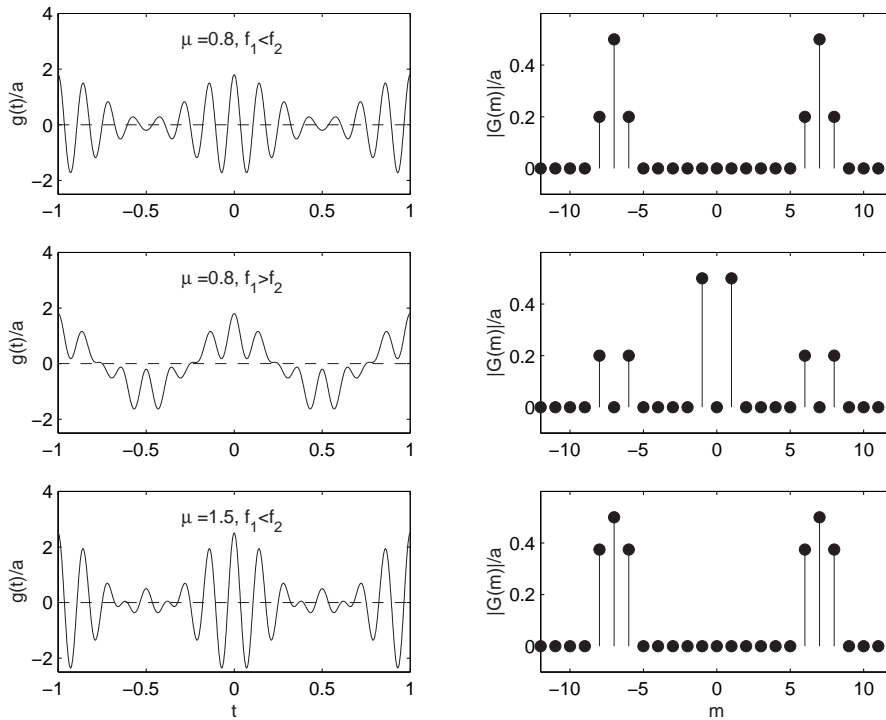
Man får da

$$P = \frac{1}{2} + \mu^2 a_1^2/4. \quad (8.7)$$

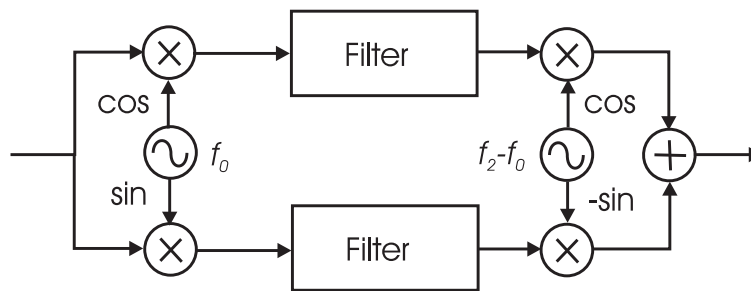
Ved anvendelse af det amplitudemodulerede signal til kommunikationsformål (radiofoni f.eks.) vælges $f_1 \ll f_2$. Det er endvidere almindeligt, at $\mu a_1 < 1$, da man derved kan demodulere signalet på simpel vis (se også kap. 8.1.2). Er $\mu a_1 > 1$, taler man undertiden om et AM-signal med undertrykt bærebølge.

Ud fra et effektmæssigt synspunkt er AM-signaler ikke særligt hensigtsmæssige til brug ved kommunikation, idet en variation i styrken af det modulerende signal $g_1(t)$ kun giver sig udslag i

² μ benævnes undertiden modulationsgraden.



Figur 8.2: Amplitudemodulerede signaler og deres amplitudespektrre.



Figur 8.3: Signalbehandling for enkeltsidebåndsmodulation.

variation af styrken af de to sidebånd og denne variation er, som det ses, den samme for begge sidebånd. Betydeligt gunstigere i denne henseende er den modulationsform, som går under betegnelsen enkelt sidebåndsmodulation (ESB), idet man ved en passende kombination af modulation og filtrering fjerner det ene sidebånd og (det meste af) bærebølgen. Et eksempel på en metode til frembringelse af ESB er vist på figur 8.3.

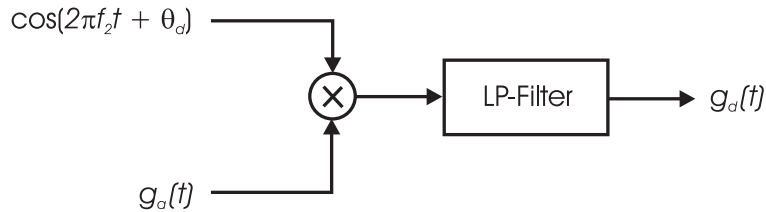
De to filtre er enten ens lavpasfiltre med en øvre grænsefrekvens f_0 eller ens højpasfiltre med en nedre grænsefrekvens f_0 . Om f_0 gælder det i øvrigt, at den skal være større end halvdelen af den højeste frekvens, som forekommer i $g_1(t)$.

Betragter man for eksempel tilfældet med højpasfiltre, vil indgangssignalerne til de to filtre med $g_1(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1)$ være henholdsvis

$$a_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} a_1 \cos(2\pi(f_1 + f_0)t + \theta_1) + \frac{1}{2} a_1 \cos(2\pi(f_1 - f_0)t + \theta_1) \quad (8.8)$$

og

$$a_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} a_1 \sin(2\pi(f_1 + f_0)t + \theta_1) - \frac{1}{2} a_1 \sin(2\pi(f_1 - f_0)t + \theta_1). \quad (8.9)$$



Figur 8.4: Signalbehandling for synkron demodulation.

Efter filtreringen haves kun de højfrequente led, som efter fornyet modulation med signalerne $\cos(2\pi(f_2 - f_0)t)$ og $-\sin(2\pi(f_2 - f_0)t)$ giver henholdsvis

$$\frac{1}{4}a_1 \cos(2\pi(f_1 + f_2)t + \theta_1) + \frac{1}{4}a_1 \cos(2\pi(f_1 - f_2 + 2f_0)t + \theta_1) \quad (8.10)$$

og

$$\frac{1}{4}a_1 \cos(2\pi(f_1 + f_2)t + \theta_1) - \frac{1}{4}a_1 \cos(2\pi(f_1 - f_2 + 2f_0)t + \theta_1), \quad (8.11)$$

og dermed ESB-signalet³

$$\frac{1}{2}a_1 \cos(2\pi(f_1 + f_2)t + \theta_1). \quad (8.12)$$

Selv om ovenstående er formuleret for rene toner, gælder tilsvarende udtryk naturligvis også, når $g_1(t)$ er et vilkårligt periodisk signal, da der her udføres en lineær signalbehandling. Signalernes "bærebølge" kan ligeledes erstattes med et vilkårligt periodisk signal. Dette kan man undertiden med fordel benytte sig af til simplificering af en forelagt praktisk signalbearbejdningsopstilling.

Som et eksempel på det sidste kan det nævnes, at de viste signaler $\cos(2\pi f_0 t)$, $\sin(2\pi f_0 t)$, $\cos(2\pi(f_2 - f_0)t)$ og $\sin(2\pi(f_2 - f_0)t)$ på figur 8.3 kan erstattes af firkantsignaler, når der benyttes lavpasfilter i opstillingen, og såfremt der tilføjes et passende - normalt ikke særlig kritisk - lavpasfilter på udgangen af opstillingen. Specielt kan dette være attraktivt, når de indgående signaler er digitale.

8.1.2 Demodulation af et amplitudemoduleret signal

Ved demodulation af et amplitudemoduleret signal

$$g_a(t) = (1 + \mu g_1(t))g_2(t) \quad (8.13)$$

(se kap. 8.1.1) forstås en signalbearbejdning, som på basis af $g_a(t)$ frembringer et signal, der er proportionalt med $g_1(t)$ (det modulerende signal). Signalets bærebølge $g_2(t)$ er i praksis næsten altid et rentonesignal, hvorfor det her antages, at $g_2(t) = \cos(2\pi f_2 t)$, hvor f_2 er bærebølgens frekvens. Det antages yderligere, at $g_1(t)$ er båndbegrænset med en øvre grænsefrekvens f_\emptyset .

Synkron demodulation af AM-signalet er betegnelsen for den signalbehandling, som ses på figur 8.4. Signalet $g_a(t)$ multipliceres med signalet $\cos(2\pi f_2 t + \theta_d)$, hvor θ_d er en konstant. Herved opstår signalet

$$\frac{1}{2}(1 + \mu g_1(t))(\cos(4\pi f_2 t + \theta_d) + \cos(\theta_d)), \quad (8.14)$$

som ved filtrering med et passende lavpasfilter giver det demodulerede signal

$$g_d(t) = \frac{1}{2}(1 + \mu g_1(t)) \cos(\theta_d). \quad (8.15)$$

³Bemærk, at den viste opstilling også kan forklares ved benyttelse af begrebet komplekse signaler (se f.eks. kap. 3).

Det ses let, at betingelsen for, at demodulationen kan gennemføres, er, at $f_\emptyset < f_2$ samt, at $\theta_d \neq \frac{1}{2}p\pi$, hvor p er hel. Herudover er der naturligvis det krav, at bærebølgefrequensen f_2 skal være kendt på det sted, hvor demodulationen foretages⁴. $g_d(t)$'s DC-komponent er sædvanligvis uden interesse.

Ved en anden metode til demodulation benytter man sig enten af enkeltensretteren eller af den lineære dobbeltensretter. Denne fremgangsmåde, som er kredsløbsmæssigt enkel, indebærer dog, at man må kræve, at $|\mu g_1(t)| \leq 1$. Er denne betingelse opfyldt, vil den ensrettede version af $g_a(t)$ kunne skrives på formen

$$(1 + \mu g_1(t))g_{2e}(t), \quad (8.16)$$

hvor $g_{2e}(t)$ er den ensrettede bærebølge. Spektret af det demodulerede signal kan da beregnes ved anvendelse af linearitetsreglen og foldningsreglen på det modulerende signal og det ensrettede rentonesignal. Det demodulerede signals spektrale komponenter ved høje frekvenser fjernes ved en lavpasfiltrering med et filter, hvis øvre grænsefrekvens $f_\emptyset < \frac{1}{2}f_2$, med mindre ensretterens konstant $k = -1$ (dobbeltensretning), hvor betingelsen er $f_\emptyset < f_2$. De lavfrekvente dele af signalet kan udtrykkes på formen

$$(1 + \mu g_1(t))k_x, \quad (8.17)$$

hvor $k_x = 2/\pi$ ved dobbeltensretning og $k_x = 1/\pi$ ved enkeltensretning. Heller ikke her har det demodulerede signals DC-komponent praktisk betydning. På figur 8.5 ses eksempler på demodulation af AM-signaler.

Bemærk, at det ikke er nødvendigt at kende frekvensen f_2 ved denne form for modulation. ESB signaler lader sig ikke demodulere på denne måde.

8.1.3 Spektret af fase- og frekvensmodulerede signaler

Frekvensmodulerede signaler finder anvendelse inden for telekommunikation (f.eks. radiofoni og data-transmission). Set i relation til amplitudemodulation indebærer frekvensmodulation (FM) undertiden en mere støjfri transmission⁵, og det er ofte således, at FM genereres på en simpel og effektmæssig attraktiv måde.

En med FM beslægtet modulationsform er fasemodulation (PM). Skriver man signalets bærebølge på formen $A \cos(2\pi f_0 t)$, og moduleres denne bærebølges fase med $g_1(t)$, vil det fasemodulerede signal $g_p(t)$ kunne udtrykkes ved

$$g_p(t) = A \cos(2\pi f_0 t + k_p g_1(t)), \quad (8.18)$$

hvor A , k_p og f_0 er konstanter. Som det ses, varierer bærebølgens fase proportionalt med $g_1(t)$. Signalets øjeblikksfrekvens f_i vil kunne findes ved en differentiation af cos-signalets argument med hensyn til tiden

$$f_i = \frac{1}{2\pi} (2\pi f_0 + k_p g_1'(t)) = f_0 + \frac{k_p}{2\pi} g_1'(t). \quad (8.19)$$

Det er således $g_1'(t)$'s størrelse, som bestemmer den største værdi, f_i kan have.

Det er undertiden nyttigt, at det modulerede signals øjeblikksfrekvens i stedet bestemmes af det modulerende signals værdi, altså

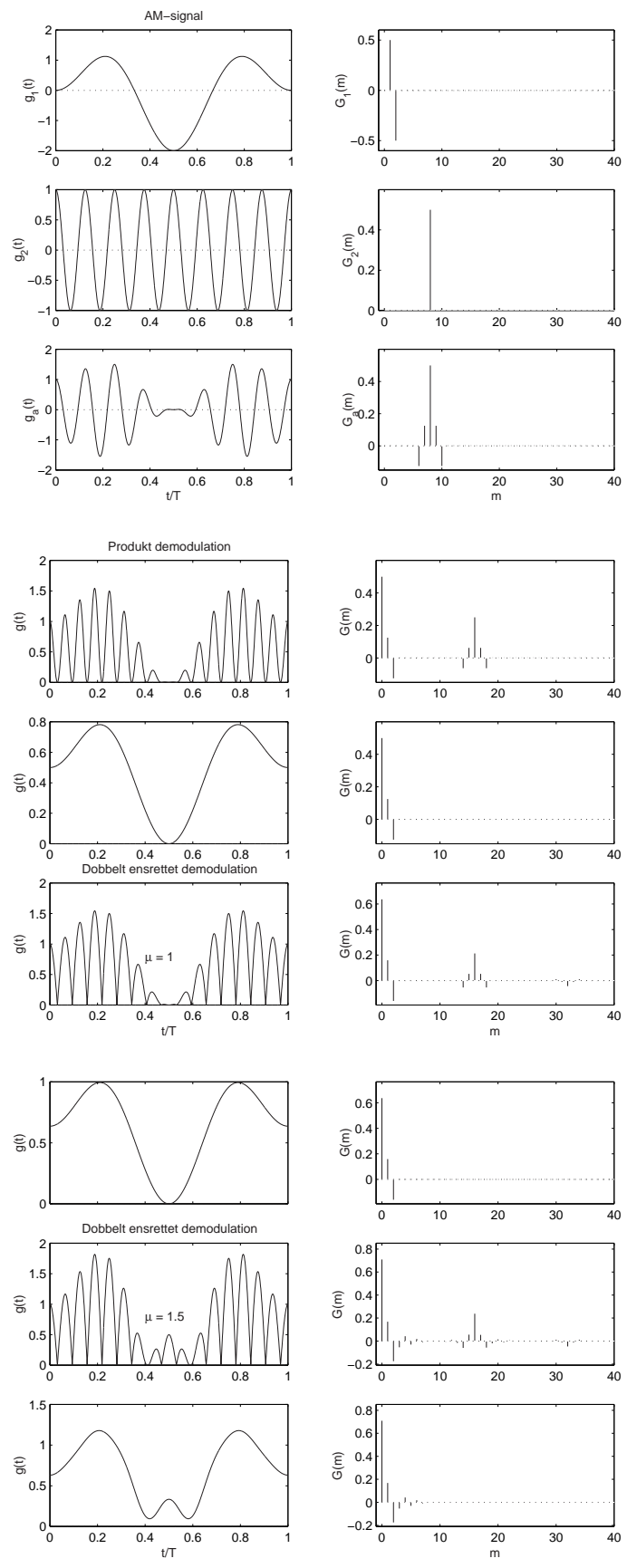
$$f_i = f_0 + k_f g_1(t), \quad (8.20)$$

hvor k_f er en konstant. Det herved frembragte signal $g_f(t)$ er et FM-signal

$$g_f(t) = A \cos(2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int g_1(t) dt + 2\pi c), \quad (8.21)$$

⁴Dette er forklaringen på, at man i praksis ikke ønsker at fjerne AM-signalets bærebølge helt. ESB-signaler kan også demoduleres ved synkron demodulation.

⁵Denne støjfrihed opnås naturligvis ikke gratis. Den "pris", der betales, er den større båndbredde, der kræves ved denne type af FM-transmission (se senere).



Figur 8.5: Demodulation af AM-signal.

hvor c er en arbitrær integrationskonstant, som der i det følgende ses bort fra.

Medens det er umiddelbart indlysende, at både PM- og FM-signalets amplitude er uafhængig af, hvorledes $g_1(t)$ varierer, kræver en beregning af de to signalers spektrale lidte flere overvejelser. Antager man, at $g_1(t)$ er periodisk med spektret $G_1(m)$ og periodetiden T , og at bærebølgens frekvens f_0 også kan skrives på formen M_0/T , hvor M_0 er hel, bliver $g_p(t)$ periodisk med periodetiden T , hvorfor PM-signalets spektrum $G_p(m)$ kan findes af

$$G_p(m) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cos\left(M_0 \frac{2\pi}{T} t + k_p g_1(t)\right) e^{-jm \frac{2\pi}{T} t} dt, \quad (8.22)$$

og FM-signalets spektrum $G_f(m)$ af

$$G_f(m) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cos\left(M_0 \frac{2\pi}{T} t + 2\pi k_f \int g_1(t) dt\right) e^{-jm \frac{2\pi}{T} t} dt. \quad (8.23)$$

Disse udtryk er svære at få et overblik over, når der ikke lægges bånd på $g_1(t)$. Betragtes derfor først specielt $\underline{g_1(t) = a \cos(2\pi t/T)}$, får man i PM-tilfældet

$$f_i = f_0 - \frac{k_p a}{T} \sin(2\pi t/T) \quad (8.24)$$

og i FM-tilfældet

$$f_i = f_0 + k_f a \cos(2\pi t/T). \quad (8.25)$$

Den maksimale ændring⁶ i f_i kaldes frekvenssvinget Δf . I PM-tilfældet er

$$\Delta f = k_p a / T, \quad (8.26)$$

altså proportionalt med modulationsfrekvensen ($1/T$), hvorimod man ved FM har

$$\Delta f = k_f a. \quad (8.27)$$

I begge tilfælde er Δf proportionalt med amplituden a . Størrelsen $\mu = \Delta f \cdot T$ benævnes sædvanligvis signalets modulationsindex.

Af udtrykkene for PM og FM signaler fås

$$\begin{aligned} g_p(t) &= A \cos(2\pi M_0 t/T + k_p a \cos(2\pi t/T)) \\ &= A \cos(2\pi M_0 t/T) \cos(k_p a \cos 2\pi t/T) \\ &\quad - A \sin(2\pi M_0 t/T) \sin(k_p a \cos(2\pi t/T)) \end{aligned} \quad (8.28)$$

og

$$\begin{aligned} g_f(t) &= A \cos(2\pi M_0 t/T + k_f a T \sin(2\pi t/T)) \\ &= A \cos(2\pi M_0 t/T) \cos(k_f a T \sin(2\pi t/T)) \\ &\quad - A \sin(2\pi M_0 t/T) \sin(k_f a T \sin(2\pi t/T)). \end{aligned} \quad (8.29)$$

Strukturen i disse udtryk viser, at signalernes spektrale er sammensat af spektrale for signalerne

$$\begin{aligned} &\cos(\mu \cos(2\pi t/T)) \\ &\sin(\mu \sin(2\pi t/T)) \\ &\cos(\mu \sin(2\pi t/T)) \\ &\sin(\mu \cos(2\pi t/T)) \end{aligned} \quad (8.30)$$

⁶Selv om det ikke fremgår direkte, er f_i en funktion af tiden t (og dermed selv et signal!).

flyttet til frekvensen M_0/T . Det kan vises, at

$$\cos(\mu \sin(2\pi t/T)) \stackrel{T}{\leftrightarrow} \begin{cases} J_m(\mu) & \text{for } m \text{ lige} \\ 0 & \text{for } m \text{ ulige,} \end{cases} \quad (8.31)$$

$$\sin(\mu \sin(2\pi t/T)) \stackrel{T}{\leftrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{for } m \text{ lige} \\ -jJ_m(\mu) & \text{for } m \text{ ulige,} \end{cases} \quad (8.32)$$

hvor $J_m(\mu)$ er Besselfunktionen af første art og m 'te orden af det (faste) argument μ (se også appendix G). Spektret af de to øvrige signaler findes enklest ved anvendelse af tidsforskydningsreglen⁷.

På fig. 8.6 ses de to signaler med tilhørende spektre for forskellige værdier af μ . Bemærk, at spektret rummer mange linier, selv om det modulerende signal er en ren tone, en følge af den ikke-lineære måde det modulerede signal dannes på. Det kan vises, at styrken af linierne aftager ret drastisk, når $|m| > \mu$. Det kan vises, at $J_0(\mu) = 0$ for visse værdier af μ . Dette får til følge, at det modulerede signal for disse værdier af μ ingen bærebølgekomponeent har.

Betragter man nu det tilfælde, hvor $g_1(t) = a \cos(2\pi t/T)$ og $\mu \ll 1$, kan man med tilnærmelse skrive

$$g_f(t) \approx A \cos(2\pi M_0 t/T) - A \sin(2\pi M_0 t/T) \cdot \mu \sin(2\pi t/T). \quad (8.33)$$

Det ses heraf, at når μ er lille, vil FM-signalet bestå af en bærebølge og to sidebånd med frekvenserne

$$M_0/T \pm 1/T, \quad (8.34)$$

og altså have samme struktur som AM-signalet (se kap. 8.1.1). Fasen af sidebåndene set i relation til bærebølgens fase er dog anderledes (se også eksemplet på figur 8.7).

Er det modulerende signal ikke en ren tone, bliver udtrykket for spektrene af FM og PM signalerne særdeles komplicerede, hvorfor nærmere oplysninger herom må hentes i faglitteraturen.

8.2 Tilpasset filter

I mange anvendelser udsendes og modtages pulser. Tiden indtil modtagelsen kan være et udtryk for distancen mellem sender og modtager, som i f.eks. radar og medicinsk ultralyd (Skolnik 1980; Jensen 1996). Styrken af det modtagne signal er relateret til genstanden, som har reflekteret den udsendte puls. F.eks. modtager en radar som regel et kraftigere signal fra store genstande end fra små.

Sådanne signaler er oftest behæftet med støj, og det er derfor ønskeligt at maksimere det ønskede signal og minimere støjen med en passende signalbehandling. Dette kan gøres med et tilpasset filter.

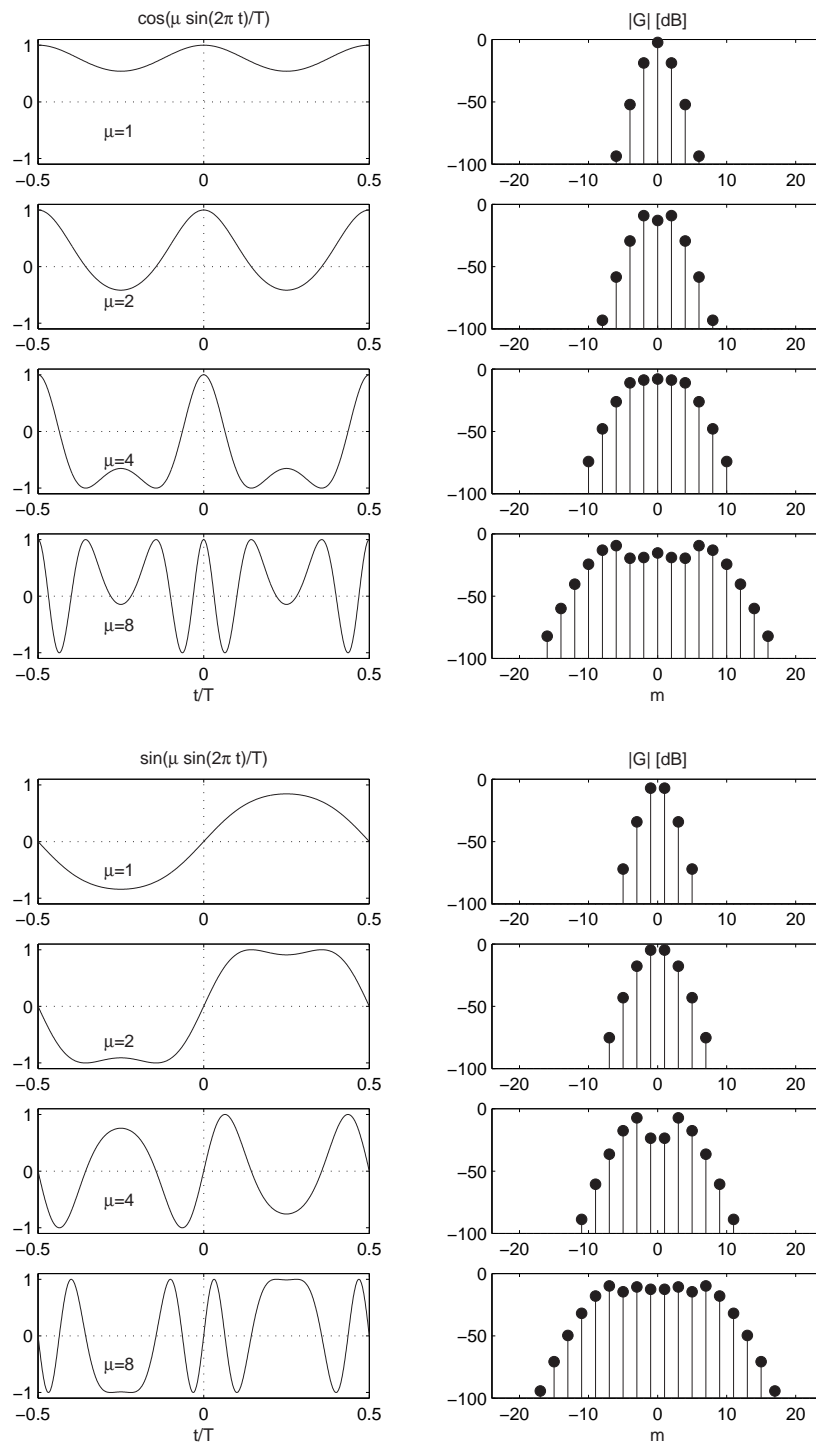
Det modtagne signal $r(t)$ antages at være givet ved

$$r(t) = g(t) + n(t) \quad (8.35)$$

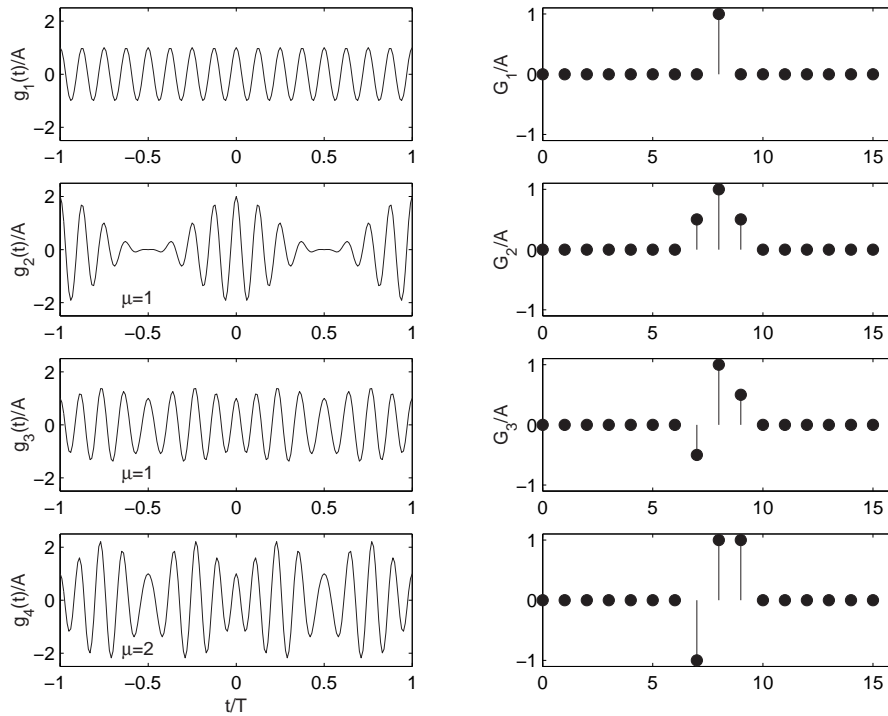
hvor $g(t)$ er responset fra systemet for f.eks. en enkelt reflektor, og $n(t)$ er støjen, som er ukorreleret med $g(t)$. Der ønskes nu et lineært, tids-invariant filter, der maksimerer forholdet mellem det ønskede signal og støjeffekten til tiden t_m . Dette forhold kan udtrykkes ved

$$\begin{aligned} \text{SN}_p &= \frac{|y(t_m)|^2}{E\{n_o^2(t_m)\}} \\ y(t) &= g(t) * h(t) \end{aligned} \quad (8.36)$$

⁷Benyt f.eks. de velkendte identiteter $\cos(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$, $\sin(x) = -\cos(x + \frac{1}{2}\pi)$



Figur 8.6: Frekvensmodulerede signaler af deres spektre for forskellige μ .



Figur 8.7: Frekvensmodulerede signaler med lille modulationsindex.

hvor $y(t_m)$ er signalværdien til tiden t_m , $h(t)$ er impulsresponsen for det tilpassede filter, $y(t)$ er udgangssignalet fra det lineære, tilpassede filter uden støj, og $n_o(t)$ er den filtrerede støj. Da støjen er stationær kan t_m erstattes med t og forholdet kan i frekvensdomænet udtrykkes ved

$$\frac{|y(t_m)|^2}{E\{n_o^2(t)\}} = \frac{|\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)H(f)e^{j2\pi ft_m} df|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)|H(f)|^2 df} \quad (8.37)$$

idet $n(t)$ antages at være stationær, og derfor har en effekt, som er uafhængig af tiden. $S_n(f)$ er støjens effekttæthedsspektrum. Antages støjen hvid fås

$$\frac{|y(t_m)|^2}{E\{n_o^2(t)\}} = \frac{|\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)H(f)e^{j2\pi ft_m} df|^2}{A \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} \quad (8.38)$$

Her er A støjens effekttæthed. Benyttes nu Schwarz' ulighed (se appendix B) fås

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)H(f)e^{j2\pi ft_m} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)e^{j2\pi ft_m}|^2 df \quad (8.39)$$

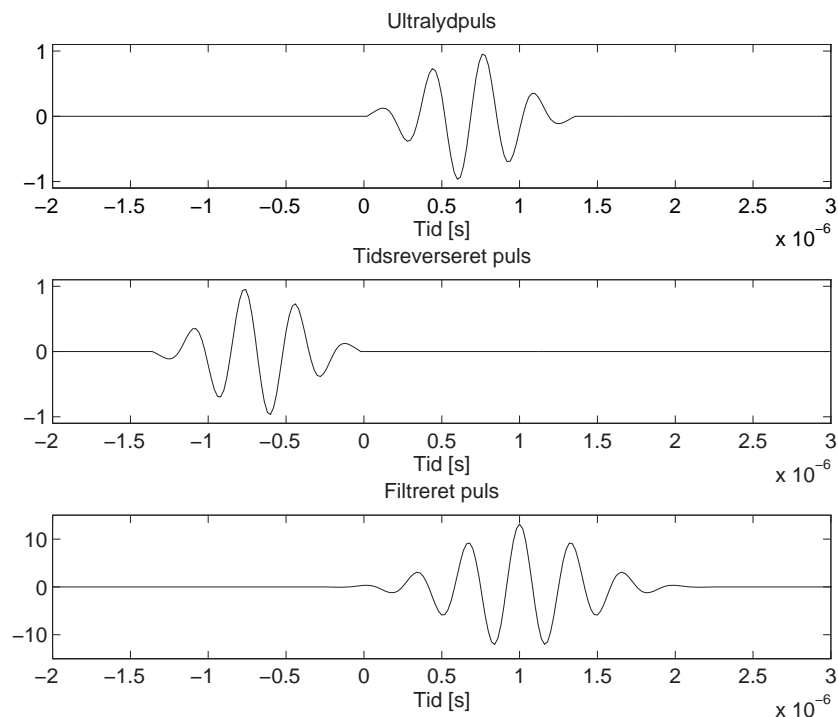
hvor lighedstegnet gælder for

$$H(f) = k_1(G(f)e^{j2\pi ft_m})^* = k_1G^*(f)e^{-j2\pi ft_m} \quad (8.40)$$

k_1 er en konstant. Det maksimale forhold fås derfor, når (8.40) er opfyldt og dermed

$$\begin{aligned} \frac{|y(t_m)|^2}{E\{n_o^2(t)\}} &\leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)e^{j2\pi ft_m}|^2 df}{A \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df}{A} \\ &= \frac{E}{A} \end{aligned} \quad (8.41)$$

Det benyttes her, at $\int |p|^2 df = \int p \cdot p^* df$ hvorved faktoren $e^{j2\pi ft_m}$ er uden betydning. Til detektionstidspunktet er signalværdien fra filteret for den ønskede del af signalet altså proportional med signalets energi E .



Figur 8.8: Tilpasset filter for en ultralydpuls og resulterende signal efter filtrering.

Den fouriertransformerede af filteret, som maksimerer spidsamplituden for udgangssignalet i forhold til støjen, er således givet ved

$$H(f) = k_1 G^*(f) e^{-j2\pi f t_m} \quad (8.42)$$

hvilket er

$$h(t) = k_1 g(t_m - t) \quad (8.43)$$

i tidsdomænet. Filteret er en tidsreverseret og forsinket version af det oprindelige, støjfrie signal. Forsinkelsen t_m vælges så filteret er kausalt. Et eksempel for en ultralydpuls er givet i figur 8.8. Filteret er tilpasset signalet så frekvensområder med megen signalenergi ikke dæmpes og områder med udelukkende støj dæmpes kraftigt. En forøget båndbredde for filteret ville forøge støjen uden en tilsvarende forøgelse i signalenergi efter filteret, hvorimod en båndbreddeformindskelse ville reducere signalenergien. Det bør bemærkes at resultatet kun gælder for hvid støj (se f.eks. Stremler (1990) for eksempel med farvet støj).

8.3 Detektion af støjbehæftede binære signaler

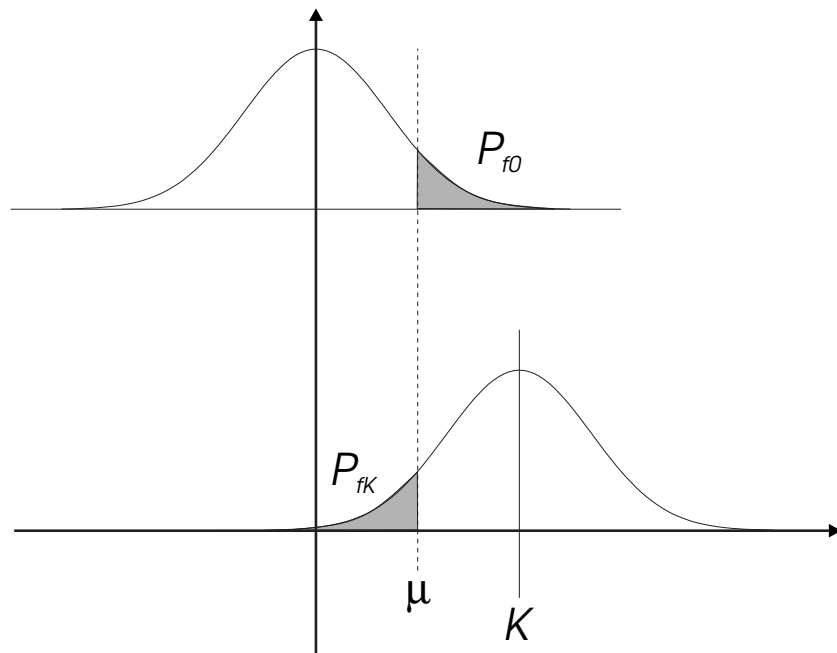
Efter filtrering skal det f.eks. i en radar afgøres, om der er et fly til tiden t_m eller ikke, og i telekommunikation skal afgøres hvilket symbol, der modtages.

Et simplificeret tilfælde er at betragte det binære signal $g(t)$ som enten har værdien 0 eller 1. Når $g(t)$ har passeret det tilpassede filter $h(t)$ fås værdien K , når $g(t)$ har værdien 1. Til tidspunktet t_m kan man altså efter det tilpassede filter modtage enten

$$y_1(t_m) = K + n_0(t_m)$$

eller

$$y_1(t_m) = n_0(t_m) \quad (8.44)$$



Figur 8.9: Sandsynlighedstætheder for signalet $y_1(t)$.

når $g(t)$ har passeret en støjbehæftet kanal og er blevet filteret med et tilpasset filter. For at beslutte om signalværdien er 0 eller 1 må benyttes en tærskelværdi μ , hvor det antages at $g(t_m)$ er lig 1 for $y_1(t_m) \geq \mu$ og $g(t_m)$ er 0 for $y_1(t_m) < \mu$. På grund af støjen er der to muligheder for fejl. Enten kan $n_0(t_m)$ reducere værdien af $y_1(t_m)$, så den bliver mindre end μ selvom $g(t_m) = 1$, eller $y_1(t_m) > \mu$ selvom $g(t_m) = 0$. Den første fejl resulterer i at en puls, som er tilstede, ikke detekteres (falsk negativ). I det andet tilfælde detekteres et signal, som ikke er der (falsk positiv). Et eksempel med gaussisk støj er vist i figur 8.9. Det skraverede areal viser, hvor sandsynlige de to fejl er. Det kan ses, at uanset valget af μ vil der begås fejl. Den samlede sandsynlighed for fejl afhænger af hvor tit 0 og K optræder i signalet. Hvis K forekommer sjældent vil falsk negative fejl også forekomme sjældent. Den samlede sandsynlighed for at begå fejl er

$$P_f = P_0 P_{f0} + P_K P_{fK} \quad (8.45)$$

hvor P_0 er sandsynligheden for $g(t_m) = 0$, og P_{f0} er sandsynligheden for at $n_0(t_m) > \mu$. Da der kun optræder de to symboler fås

$$P_f = P_0 P_{f0} + (1 - P_0) P_{fK} \quad (8.46)$$

Hvis der er den samme sandsynlighed for 0 og K fås

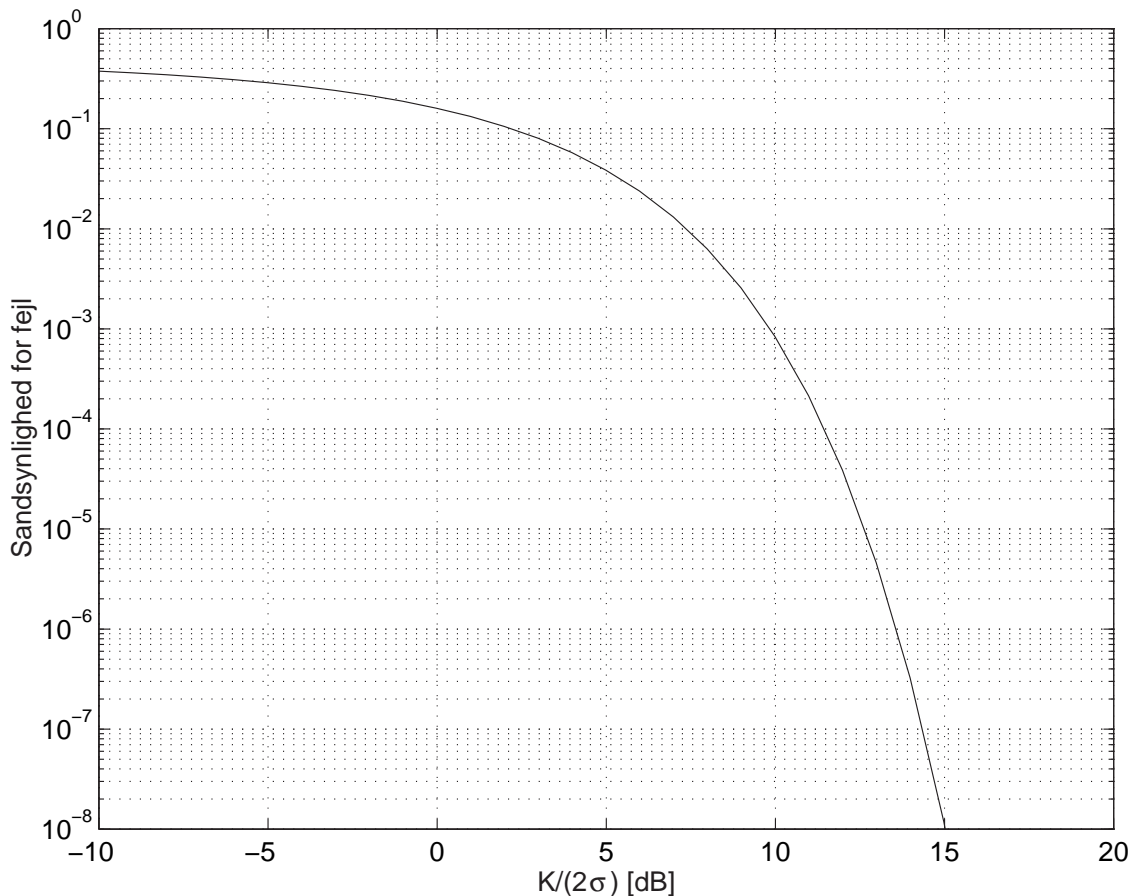
$$P_f = \frac{1}{2} (P_{f0} + P_{fK}) \quad (8.47)$$

Hvis sandsynlighedstæthedsfunktionen for støjen er symmetrisk omkring dens middelværdi fås $P_{f0} = P_{fK}$, og tærskelværdien bliver umiddelbart $\mu = K/2$, da begge fejltypen har samme vægt. De to sandsynligheder, P_{f0} og P_{fK} , er for gaussisk støj givet ved

$$P_f = P_{f0} = P_{fK} = \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\xi^2/(2\sigma^2)} d\xi \quad (8.48)$$

der afhænger af μ og σ , hvor σ er standardafvigelsen for $n_0(t)$. Fejlsandsynligheden er vist som funktion af $K/2\sigma$ i figur 8.10.

Oftest er sandsynligheden for de to symboler ikke lige store, og dermed bliver valget af tærskelværdien ikke umiddelbart.



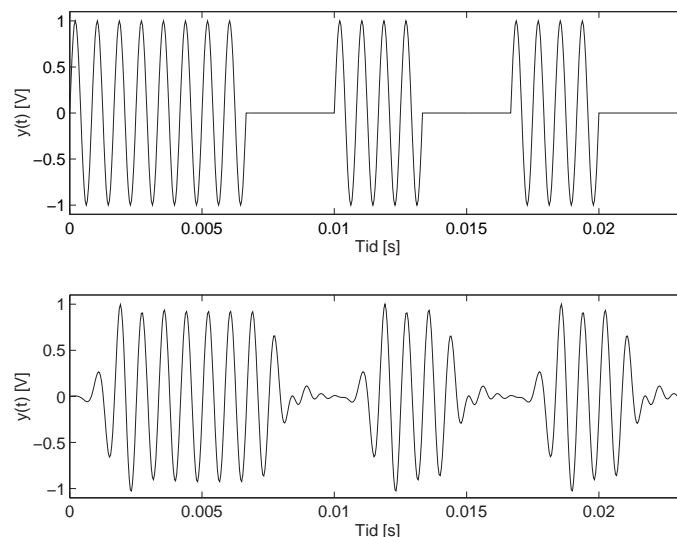
Figur 8.10: Sandsynligheden for fejl for gaussisk fordelt støj, når der er lige stor sandsynlighed for de to symboler.

For det tilpassede filter fås til tiden t_m en værdi, der er proportional med signalets energi E . Hvis der ikke modtages noget svar fra, f.eks. refleksion af radarimpulsen fra et fly, modtages kun støj. Det er ækvivalent til situationen givet i formel (8.44). Derfor fås den samme sandsynlighed for fejl, og den samme metode for bestemmelsen af tærskelværdien kan benyttes. $K/2\sigma$ er således forholdet mellem den modtagne signalenergi divideret med to gange RMS værdien af støjen filtreret gennem det tilpassede filter.

Oftest vil man f.eks. i radar have at P_K er meget mindre end P_0 , og at P_K ikke kendes. Derfor må tærskelværdien oftest bestemmes empirisk.

8.4 Digitale modulationsformer

I mange moderne anvendelser findes resultatet af en signalbehandling i form af et digitalt signal, som ønskes transmitteret via modem, netværk eller digital teletransmission. Signalet skal derfor ved digital modulation bringes fra en digital form til en passende analog form, som er egnet til transmission. Der findes basalt tre modulationstyper: amplitude-, fase- og frekvensmodulation, som omtales i det følgende.



Figur 8.11: Amplitudemoduleret signal for den binære sekvens 1101010 sendt med $f_c = 1200$ Hz og $T = 4/f_c = 3.3$ ms. Den nederste graf viser signalet efter det har passeret en kanal med en begrænset båndbredde (f.eks. en telefonlinie).

8.4.1 Digital amplitudemodulation

I digital amplitudemodulation benyttes at signalets amplitude afhænger af værdien af det binære digitale signal. For værdien 1 sendes signalet

$$p(t) = \begin{cases} a \sin(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (8.49)$$

hvor f_c er centerfrekvensen for den sendte puls, og T er dens varighed. For værdien 0 sendes et signal med amplituden 0. Den binære streng 1101010 sendes således som vist på figur 8.11. Den øverste graf viser det ideelle signal, og den nederste viser signalet efter passage gennem en telefonlinie med et brugbart gennemgangsområde fra 300 Hz til 3 kHz.

Der skiftes altså mellem to amplitudeværdier og metoden benævnes Amplitude-Shift Keying (ASK) i den engelsksprogede litteratur.

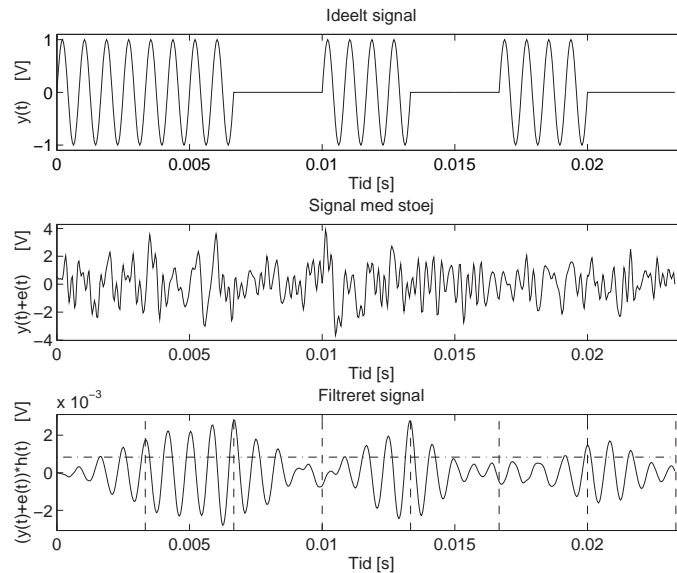
Når signalet modtages efter transmission skal den binære datastrøm gendannes. Det kan f.eks. ske ved at anvende et tilpasset filter, og dernæst finde om der blev sendt 0 eller 1. Den tilpassede filtrering består af en foldning med $p(t_m - t)$, hvor t_m er tidspunktet for detektion. Den maksimale værdi ud fra filteret er proportional med energien af den udsendte puls (se afsnit 8.2). Hvis sandsynligheden for 0 og 1 er lige store sættes tærskelværdien for skellen mellem de to værdier til $E/2$. K i formel (8.44) svarer således til E , og hermed fås fejlsandsynligheden givet i figur 8.10 i det forrige afsnit.

Eksempel 8.1 *Det amplitudemodulerede signal vist øverst på figur 8.11 sendes over en telefonkanal med uendelig båndbredde, som tilføjer signalet gaussisk fordelt støj med en konstant effekttæthed på 10^{-4} W/Hz indenfor en båndbredde på $f_n = 5$ kHz.*

Beregn fejlsandsynligheden: Energien af signalet efter den tilpassede filtrering er

$$E = \int_0^{4/f_c} a^2 \sin^2(2\pi f_c t) dt = \frac{a^2}{2\pi f_c} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{8\pi} = \frac{2a^2}{f_c} \quad (8.50)$$

Det tilpassede filter er en tidsreverseret version af den udsendte puls, og kan via frekvensforskydningsreglen ses at have sin maksimale forstærkning omkring $f = f_c$ (se f.eks. figur 2.9). Overføringsfunktionen



Figur 8.12: Amplitudemoduleret signal for den binære sekvens 1101010 sendt med $f_c = 1200$ Hz og $T = 4/f_c = 3.3$ ms. Den øverste graf viser det ideelle signal, den næste viser signalet med støj, og til sidst efter filtrering med et tilpasset filter. Den vandrette line viser tærskelværdien $E/2$, og de lodrette streger viser tidspunkterne for detektion.

er således koncentreret omkring $f = f_c$ og forstærkningen falder for højere værdier af f . Antages det at forstærkningen er forsvindende for $f > f_n$ fås støjeffekten via Parsevals formel til (Dette svarer til at antage at støjen er hvid og overvurderer derfor støjens effekt)

$$\begin{aligned}
 P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_n(f) df = S_n(0) \int_{-f_n}^{f_n} |H(f)|^2 df \approx S_n(0) \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \\
 &= S_n(0) \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = S_n(0) \frac{2a^2}{f_c}
 \end{aligned} \tag{8.51}$$

hvor $S_n(f)$ er støjens effekttæthed. Forholdet $\frac{E}{2}/\sigma$ er således

$$\sigma = \sqrt{P_n} = \sqrt{S_n(0) \frac{2a^2}{f_c}} \tag{8.52}$$

$$\frac{E}{2\sigma} = \frac{\frac{2a^2}{f_c}}{2\sqrt{S_n(0) \frac{2a^2}{f_c}}} = \sqrt{\frac{a^2}{2S_n(0)f_c}} \tag{8.53}$$

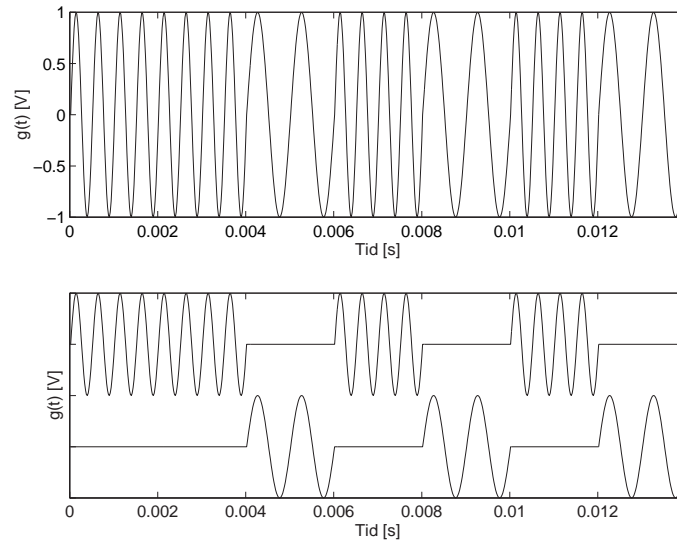
Med de givne tal fås

$$\frac{E}{2\sigma} = \sqrt{\frac{1^2}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 1200}} = 6.2 \text{ dB}$$

Hermed fås en fejlsandsynlighed på $2 \cdot 10^{-2}$. De forskellige signaler er vist i figur 8.12 for den binære sekvens 1101010.

Øges amplituden for sinuspulsen fra 1 til 2 volt fås et forhold på 12 dB og dermed en fejlsandsynlighed på $8 \cdot 10^{-5}$; altså en betydelig forbedring.

Fejlsandsynligheden vil også afhænge af om det korrekte detektionstidspunkt benyttes. Derfor er det vigtigt, at modtageren synkroniseres til afsenderen. Dette problems løsning falder dog uden for rammerne for disse noter.



Figur 8.13: Frekvensmoduleret signal for den binære sekvens 1101010 sendt med $f_1 = 2000$ Hz, $f_0 = 1000$ Hz og $T = 2$ ms. Den øverste graf viser det transmitterede signal, og den nederste viser signalerne for symbolerne 1 og 0 separat.

For hvad støj kan udledes en simpel relation til bestemmelse af fejlsandsynligheden, som giver indsigt i filterets og støjens indflydelse. Antages det at støjen er hvid (har konstant effekttæthed) fås støjens effekt efter filtrering til

$$P_n = S_n(0)E \quad (8.54)$$

hvor E er energien af pulsen $p(t)$. Hermed fås forholdet

$$\frac{E}{2\sigma} = \frac{E}{2\sqrt{S_n(0)E}} = \sqrt{\frac{E}{4S_n(0)}} \quad (8.55)$$

Det er altså forholdet mellem energien af pulsen og effekttætheden af støjen tilført fra transmissionsskanalen, der bestemmer sandsynligheden for fejl.

8.4.2 Frekvensmodulation

Den digitale information kan også overføres ved at benytte pulser med forskellig centerfrekvenser. For symbolet 1 sendes

$$p_1(t) = \begin{cases} a \sin(2\pi f_1 t) & 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (8.56)$$

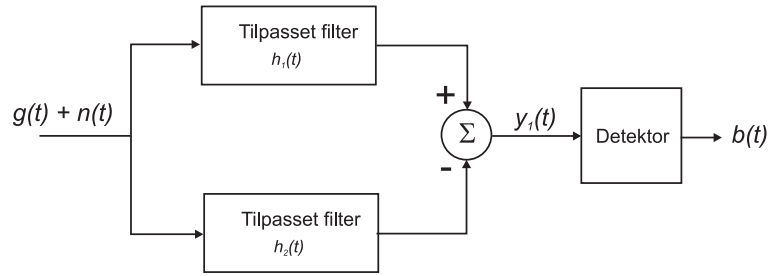
og for symbolet 0:

$$p_0(t) = \begin{cases} a \sin(2\pi f_0 t) & 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (8.57)$$

hvor $f_1 T$ of $f_0 T$ er heltal.

Den binære streng 1101010 sendes som vist øverst på figur 8.13. Der skiftes mellem to frekvensværdier og metoden benævnes Frequency-Shift Keying (FSK) i den engelsksprogede litteratur.

Der benyttes nu to tilpassede filtre til detektionen; et for hver pulstype. Til tidspunktet for detektion er signalværdien fra filtrene proportional med energien for den udsendte puls. Da varigheden af pulserne for de to symboler er lige store er energien E for pulserne lig hinanden. En mulig detektionsmetode er vist på



Figur 8.14: Detektor for FSK modulation.

figur 8.14. Det modtagne signal passerer de to tilpassede filtre og subtraheres. Denne signalbehandling kan uden støjbidraget skrives som

$$y(t) = g(t) * h_1(t) - g(t) * h_2(t) = g(t) * (h_1(t) - h_2(t)). \quad (8.58)$$

For detektionstidspunktet t_m fås

$$y(t_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)(h_1(t_m - \theta) - h_2(t_m - \theta))d\theta \quad (8.59)$$

hvor $h_1(t_m - t) = g_1(t_m - t_m + t) = g_1(t)$ (se ligning (8.43)) og $h_2(t_m - t) = g_2(t)$. Til detektionstidspunktet $t_m = 0$ fås derfor en signalværdi på

$$y(0) = \int_0^T a \sin(2\pi f_1 \theta)(a \sin(2\pi f_1 \theta) - a \sin(2\pi f_0 \theta))d\theta \quad (8.60)$$

når der modtages symbolet 1 og signalet er støjrit. Dette kan omskrives til

$$\begin{aligned} y(0) &= E - \int_0^T a \sin(2\pi f_1 \theta)a \sin(2\pi f_0 \theta)d\theta \\ &= E - \frac{a^2}{2} \int_0^T \cos(2\pi(f_1 - f_0)\theta) - \cos(2\pi(f_1 + f_0)\theta)d\theta \\ &= E - \frac{a^2}{2} \int_0^T \cos(2\pi 2\Delta f \theta) - \cos(2\pi 2(f_0 + \Delta f)\theta)d\theta \end{aligned} \quad (8.61)$$

Det sidste integral vil være nul, hvis der integreres over et helt antal perioder af sinus signalet med frekvensen $\Delta f = \frac{f_1 - f_0}{2}$. Dette er opfyldt når $2T\Delta f = p$, hvor p er et heltal, og de to signaler siges at være ortogonale.

En lignende udregning fås, når der modtages pulsen for symbolet 0. Her fås

$$y(0) = \int_0^T a \sin(2\pi f_0 \theta)(a \sin(2\pi f_1 \theta) - a \sin(2\pi f_0 \theta))d\theta = -E \quad (8.62)$$

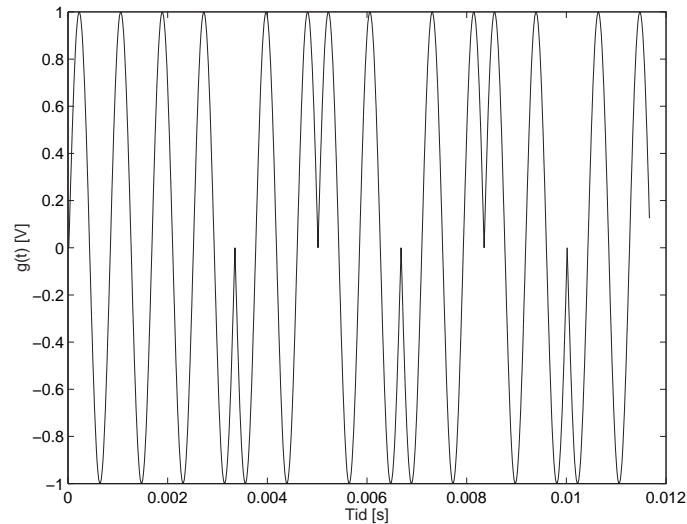
Ud fra denne detektor fås derfor enten værdien E eller $-E$ afhængig af hvilken puls, der er udsendt, når de to signaler er ortogonale. Tærskelværdien kan derfor sættes til 0.

Støjen i signalet bliver også filtreret, og den resulterende støjefekt er givet ved

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(f) - H_2(f)|^2 S_n(f)df \quad (8.63)$$

hvor $S_n(f)$ er effektætheden af støjen og H_1, H_2 er overføringsfunktionerne for de to tilpassede filtre. Antages det, at støjens effektæthed er konstant inden for området, hvor de to filtre har betydende forstærkning fås

$$P_n = S_n(0) \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(f) - H_2(f)|^2 df \quad (8.64)$$



Figur 8.15: Fasemoduleret signal for den binære sekvens 1101010 sendt med $f_c = 1000$ Hz og $T = 2/f_c = 2$ ms.

Det sidste led er:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (H_1(f) - H_2(f))(H_1^*(f) - H_2^*(f))df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(f)|^2 + |H_2(f)|^2 - H_1(f)H_2^*(f) - H_1^*(f)H_2(f)df \end{aligned}$$

De to sidste led er lig signalet $g_2(t)$ foldet med den tidsreverserede af signalet $g_1(t)$, og resultatet er 0, da de to signaler er ortogonale. Hermed fås

$$P_n = S_n(0) \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(f)|^2 + |H_2(f)|^2 df = 2S_n(0)E \quad (8.65)$$

Støjeffekten bliver altså fordoblet ved subtraktionen.

Sandsynligheden for fejl kan, som for ASK modulation, findes ud fra figur 8.10. Tærskelværdien er nul, og det er kun støjamplituder over en værdi på E , der giver anledning til fejl. Støjeffekten er blevet fordoblet ved subtraktionen, og derved er det forholdet $E/(\sqrt{2}\sigma)$, som bestemmer sandsynligheden. På lignende måde som i forrige afsnit kan forholdet, som bestemmer fejlsandsynligheden, udregnes til

$$\sqrt{\frac{E^2}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{E^2}{2S_n(0)E}} = \sqrt{\frac{E}{2S_n(0)}} \quad (8.66)$$

Der opnås altså en 3 dB forbedring i forholdet ved benyttelse af FSK istedet for ASK modulation.

8.4.3 Fasemodulation

Ved denne metode benyttes skift i signalets fase for at indikere om der sendes symbolet 0 eller 1. Når der sendes to symboler benyttes at skifte mellem en fase på π og 0. Metoden benævnes Phase Shift Keying (PSK). Den binære sekvens 1101010 kommer derved til at se ud som på figur 8.15.

Til detektionen benyttes et tilpasset filter, som er den tidsreverserede puls. For symbolet 1 vil filterets udgangsværdi være proportional med E (energien af pulsen) ved detektionstidspunktet og for symbolet 0 er værdien $-E$. Tærskelværdien for detektionen kan derfor sættes til 0, når der er lige stor sandsynlighed

for de to signaler. Effekten af støjen efter filtreringen er $P_n = \sigma^2 = S_n(0)E$, og amplituden af støjen skal være større end E for at give anledning til en fejldetektion. Hermed fås forholdet, som bestemmer sandsynligheden, til

$$\frac{E}{\sigma} = \sqrt{\frac{E^2}{S_n(0)E}} = \sqrt{\frac{E}{S_n(0)}} \quad (8.67)$$

altså en 6 dB forbedring i forhold til ASK modulation. For det tidligere eksempel svarer det til at man kan sende med en amplitude på 1 volt og opnå en fejlsandsynlighed på $8 \cdot 10^{-5}$ ved at benytte PSK istedet for ASK modulation.

Eksempler på biomedicinske signaler

I dette kapitel gives en række eksempler på signaler fra det medicinske område. Kapitlet er kun tænkt som en kort introduktion for at vise signalanalysen og behandlingens betydning for det medikotekniske område, og for at danne grundlag for øvelserne tilknyttet dette kursus. Faglitteraturen må konsulteres, hvis yderligere information ønskes om signalerne, deres måling og behandling (se f.eks. [1], [13] og [6]).

9.1 Ultralydskanning

Ultralyd er tryksvingninger over det hørbare område, dvs. med en frekvens over 20 kHz. Ultralyd benyttes industrielt til undersøgelse af materialer ved ikke destruktiv testning og i sonar til f.eks. visning af havbundens dybde. Medicinsk kan ultralyd benyttes til fremvisning af billeder af næsten alle bløde vævsstrukturer og til diagnosticering af blodets strømning.

I medicinsk ultralyd udsendes en kort puls i megahertz området som vist øverst på figur 9.1 med en piezoelektrisk transducer. Pulsen vil blive reflekteret af de forskellige vævsstrukturer, og der modtages et signal som vist nederst på figur 9.1, ved at anvende den samme transducer som modtager.

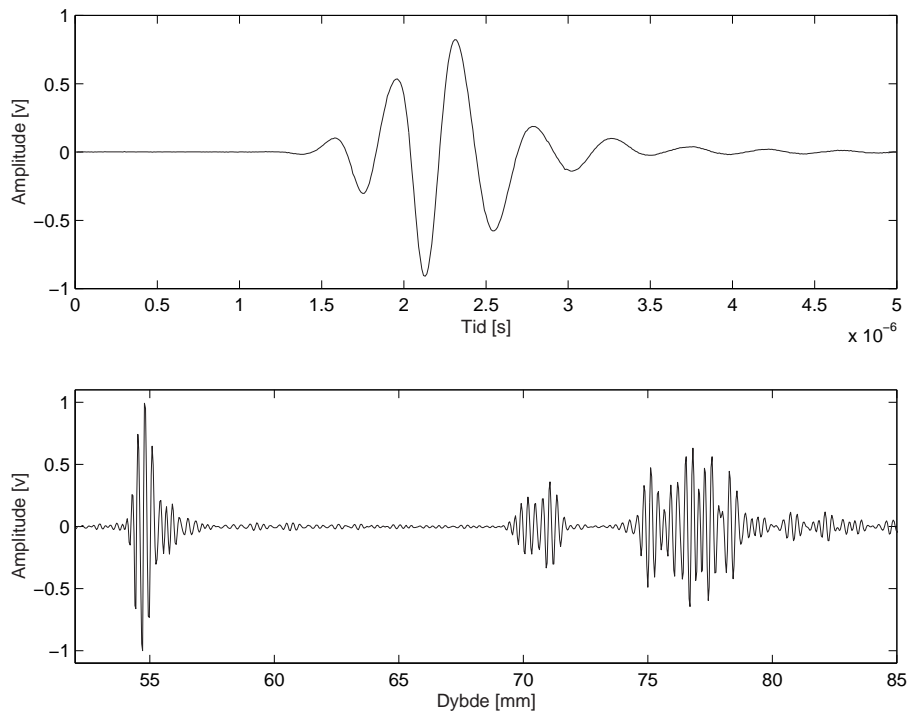
En simpel model for det modtagne signal er:

$$y(t) = p(t) * e(t), \quad (9.1)$$

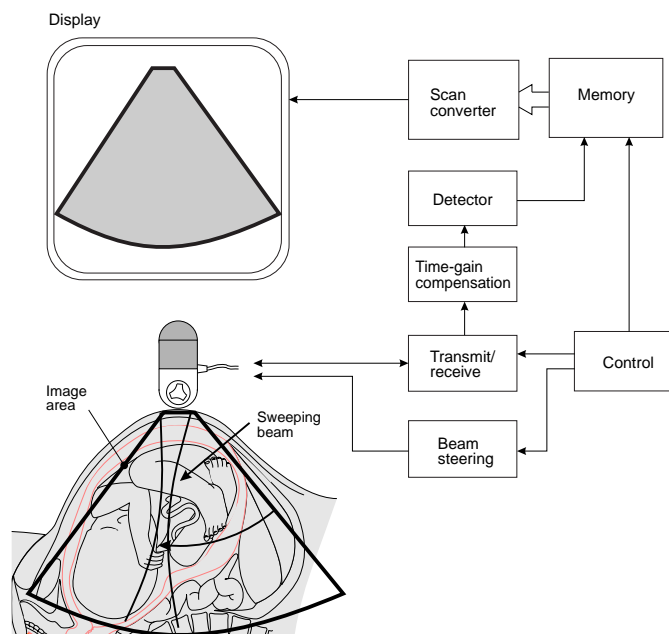
hvor $p(t)$ er den udsendte puls og $e(t)$ er "vævssignalet", som genereres af vævsstrukturen. Da der oftest modtages reflekterede signaler fra en kompleks sammensætning af forbindelsesvæv, celler og blodkar kan $e(t)$ karakteriseres som et stokastisk signal med en gaussisk sandsynlighedstæthed og et hvidt effekttæthedsspektrum.

Ved at anvende ultralyd med frekvenser i megahertz området kan lydstrålen dirigeres og fokuseres i en bestemt retning, og man kan herved opbygge et billede af kroppens indre struktur. Et sådant system er vist på figur 9.2. I transduceren placeret på huden findes et roterende transducerkrystal, der kan udsende en fokuseret ultralydstråle. Strålen roteres over området, der ønskes afbildet. Det modtagne signal forstærkes og indhyllingskurven findes ved hjælp af f.eks. en hilbert transformation som beskrevet i kapitel 3. Indhyllingskurvens amplitude er så proportional med vævets refleksionsstyrke. Endelig om sættes de enkelt signaler til et billede ved hjælp af en polær til rektangulær mapning. Der kan opsamles 20 til 30 billeder per sekund med denne teknik på grund af ultralydens høje udbredeshastighed i væv. Lydhastigheden c er 1540 m/s og herved vil tiden for opsamling af en puls-ekko linie være

$$t_d = \frac{2d}{c} \quad (9.2)$$



Figur 9.1: Eksempel på 3 MHz ultralydpuls (top), og signal modtaget fra en lever (bund).



Figur 9.2: Ultralydssystem til at optage billeder af kroppens organer (gengivet fra Jensen (1996)).



Figur 9.3: Ultralydbillede af foster i 13. uge (gengivet fra Jensen (1996)). Man kan se hovedet, benene, rygsøjlen, etc.

hvor d er den maximale dybde for målingen. For en typisk værdi på $d = 15$ cm fås $t_d = 195\mu s$. Der kan altså opsamles godt 5000 puls-ekko linier per sekund, og da et billede består af 100 til 200 linier fås 25 - 50 billeder per sekund. Ultralyd kan således benyttes til måling og fremvisning af sandtids billeder (B-mode) og til at studere både statiske og dynamiske del af kroppen. De hyppigste anvendelser er skanning af fostre, hjertet og andre bløde vævsstrukturer. Et eksempel på et ultralydbillede af et foster i 13. uge kan ses på figur 9.3. Her kan tydeligt ses fosterets hoved, rygsøjle, ben og fødder. På en bedre gengivelse end her, og med dynamiske billeder, er der mulighed for at se endnu flere detaljer og bl.a. studere fostrets hjerte og dets bevægelse.

9.2 Måling af blodhastighed med ultralyd

Grundet den høje målehastighed er det også muligt at benytte ultralyd til at måle blodets strømning i kroppen. Dette gøres ved at måle et antal gange i en retning, og så følge ændringen i signalet fra gang til gang. Ved at måle skiftet i position fra måling til måling kan hastigheden bestemmes som positionsskiftet divideret med tiden mellem målingerne. Hastigheden kan så vises enten som en funktion af tiden for et sted i blodkarret eller som et farvebillede overlejret det normale, anatomiske B-mode billede.

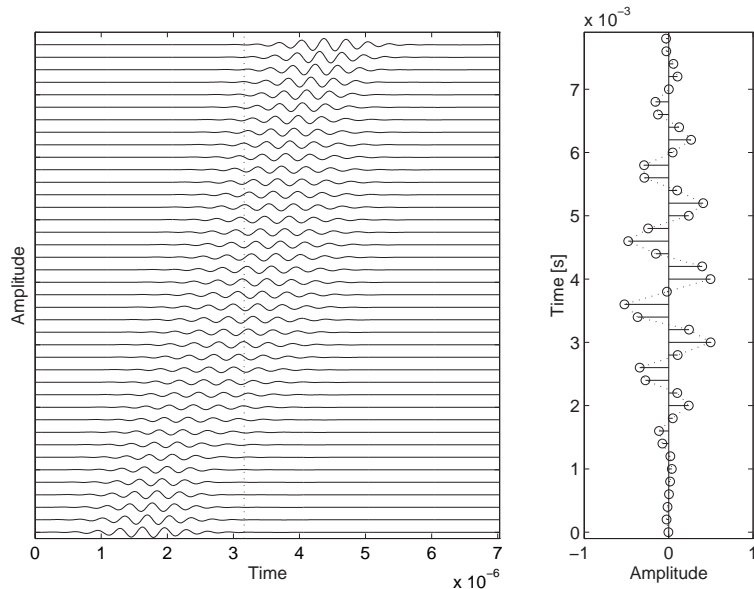
En model for målingen kan konstrueres med udgangspunkt i (9.1) for det modtagne ultralydsignal. For at gøre udledningen simpel betragtes først signalet fra en enkelt blodpartikel og siden generaliseres til en samling af uafhængige blodpartikler. Hvis signalet fra en enkelt partikel er $e(t)$, fås det modtagne signal til:

$$y_1(t) = p(t) * e(t). \quad (9.3)$$

Gentages målingen igen vil partiklen have flyttet sig en distance lig $d_b = v_z T_{prf}$, hvor v_z er blodhastigheden i ultralydstrålens retning, og T_{prf} er tiden mellem de to målinger. Herved forsinkes det modtagne signal med $t_s = 2d_b/c$, da ultralyden både skal udbrede sig ned til partiklen og tilbage igen. Herved bliver den anden måling givet ved

$$y_2(t) = p(t) * e(t - t_s) = y_1(t - t_s). \quad (9.4)$$

Altså en forsinket version af den første måling. Udføres eksperimentet en række gange fås altså signaler som succesivt er mere og mere forsinket ved bevægelse væk fra transduceren, og der kan modtages



Figur 9.4: Ultralydsignal fra en enkelt spredner, som bevæger sig igennem et ultralyd felt. På venstre side er vist de modtagne signaler og højresiden viser signalet samplet ved den stiplede linie.

signaler som vist i figur 9.4. Her er vist en række modtagne signaler for en enkelt partikel, som bevæger sig væk fra transduceren. Der udføres så en sampling af det modtagne signal for tidspunktet indikeret ved den stiplede linie. Dette tidspunkt er altså fast relativt til udsendelse af ultralydpulsen, og herved samples ændringen i signalet fra puls- til pulsuksendelse. Signalet fra væv, som ikke bevæger sig, vil derfor give samme værdi for måling til måling.

Ved ultralydmåling udsendes en sinusformet puls givet ved

$$p(t) = g(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (9.5)$$

hvor $g(t)$ er pulsens indhyllingskurve. Spredning fra en enkelt partikel modelleres som en ideel refleksion i form af en delta-funktion og herved fås

$$y_i(t) = p(t) * \delta(t - \frac{2d_p}{c} - it_s) = g(t - \frac{2d_p}{c} - it_s) \sin(2\pi f_0(t - \frac{2d_p}{c} - it_s)). \quad (9.6)$$

hvor d_p er afstanden fra transduceren til partikel ved den første pulsuksendelse, tiden t er relativ til pulsuksendelsen, og i angiver nummeret for pulsuksendelsen. Samples for et fast tidspunkt relativ til pulsuksendelsen givet ved

$$t_x = \frac{2d_p}{c} \quad (9.7)$$

fås det samlede signal til

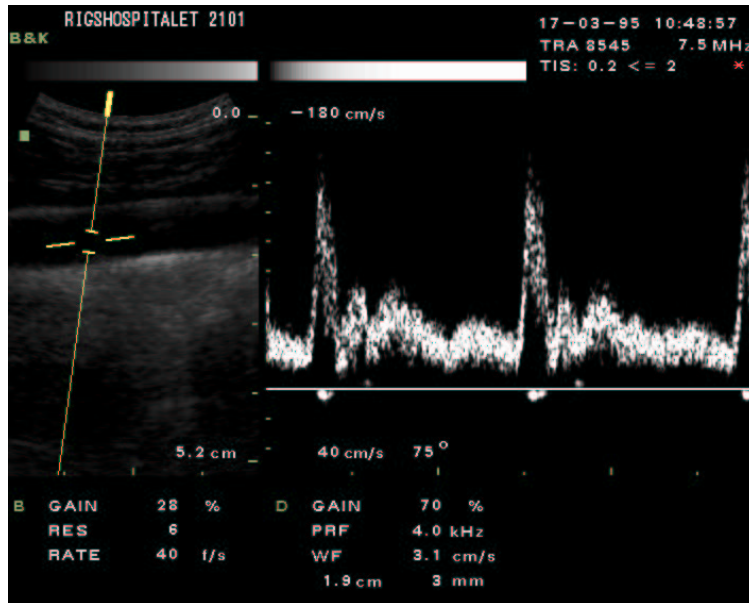
$$y_i(t_x) = -g(-it_s) \sin(2\pi f_0 it_s) = -g(-it_s) \sin(2\pi \frac{2v_z}{c} f_0 i T_{prf}). \quad (9.8)$$

Bemærk at iT_{prf} svarer til tiden, og at frekvensen af det modtagne signal nu er proportional med blodets hastighed. Frekvensen af det modtagne signal er således

$$f_p = \frac{2v_z}{c} f_0. \quad (9.9)$$

En fouriertransformation af det samlede signal giver således en direkte indikation af hastigheden. Typiske værdier for de indgående størrelser er $v_z = 0.5$ m/s, $c = 1540$ m/s, $f_0 = 5$ MHz, og hermed bliver den modtagne frekvens

$$f_p = \frac{2 \cdot 0.5}{1540} 3 \cdot 10^6 = 1950 \text{ Hz}. \quad (9.10)$$



Figur 9.5: Ultralydbillede af carotis arterien til hjernen og dens blodflow.

De modtagne frekvenser er således i audioområdet og kan direkte afspilles fra skanneren.

For en helt række uafhængige blodpartikler fås et stokastisk refleksionssignal. Da målemetoden er lineær fås en superposition af bidragene fra de enkelte partikler, og modellen kan direkte overføres på det stokastiske signal. Effektspektret for det samlede signal er således stadig et udtryk for blodets hastighedsfordeling. Dette benyttes i spektrale systemer, hvor spektret for det modtagne signal vises som funktion af tiden som vist i figur 9.5. Her er på venstre side vist det normale B-mode billeder, og på højre side er vist hastighedsfordeling over tiden for stedet indikeret ved den hvide linie. Der er udført en fouriertransformation af de målte data, og spektrene er vist side om side. En lys farvetone indikerer blodpartikler med en given hastighed. Her er vist hastigheden i carotis arterien, som forsyner hjernen med blod. Hastighedsfordelingen er vist over 2 sekunder, hvor tiden er angivet på x -aksen og hastigheden på y -aksen. Hjertets pulsation kan tydelig ses.

En anden billedetype viser blodets strømning over et område, som vist på figur 9.6. Her findes middelhastigheden for et sted i billedet ud fra middelfrekvensen i det modtagne signal. Dette gøres med

$$\bar{f} = \frac{\int_{-f_{prf}/2}^{f_{prf}/2} fY(f)df}{\int_{-f_{prf}/2}^{f_{prf}/2} Y(f)df} \quad (9.11)$$

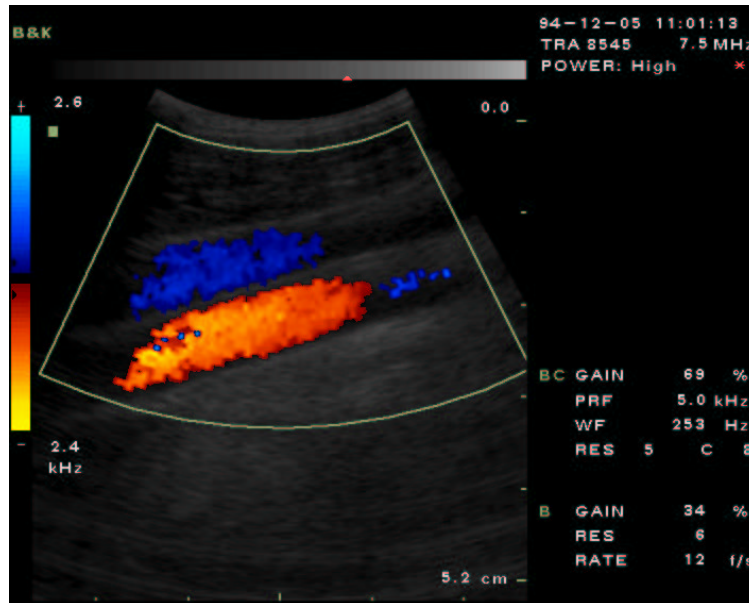
hvor $Y(f)$ er effektspektret for det modtagne signal for en given dybde og $f_{prf} = 1/T_{prf}$. Hastigheden er så

$$\hat{v}_z = \frac{c}{2} \frac{\bar{f}}{f_0} \quad (9.12)$$

og indikeres med en farve overlejret det normale B-mode billede. F.eks. kan en rød farvetone indikere hastighed mod transduceren og blå væk fra transduceren.

En anden metode til at finde hastigheden er at benytte krydskorrelationen mellem modtagne signaler, og herudfra bestemme den tidlige forskydning mellem to pulsudsendelser. Her krydskorreleres to modtagne signaler

$$R_{12}(\tau) = E\{y_1(t)y_2(t+\tau)\} = E\{y_1(t)y_1(t-t_s+\tau)\} = R_p(\tau) * R_c(\tau-t_s) \quad (9.13)$$



Figur 9.6: Farvebillede af blodstrømmen til og fra hjernen.

hvor $R_p(\tau)$ er autokorrelationsfunktionen af den udsendte puls, og $R_e(\tau)$ er autokorrelationsfunktionen for signalet fra vævet. Det sidste kan anses for at være et hvidt, stokastisk signal, hvorved autokorrelationsfunktionen er

$$R_e(\tau) = A\delta(\tau), \quad (9.14)$$

hvor A er spektraltætheden af refleksioner, som indikerer deres styrke. Hermed fås

$$R_{12}(\tau) = AR_p(\tau - t_s). \quad (9.15)$$

Da $R_p(\tau)$ har et globalt maximum for $\tau = 0$, får $R_{12}(\tau)$ et globalt maximum for $\tau = t_s$, hvorved t_s kan bestemmes. Hermed kan hastigheden findes som

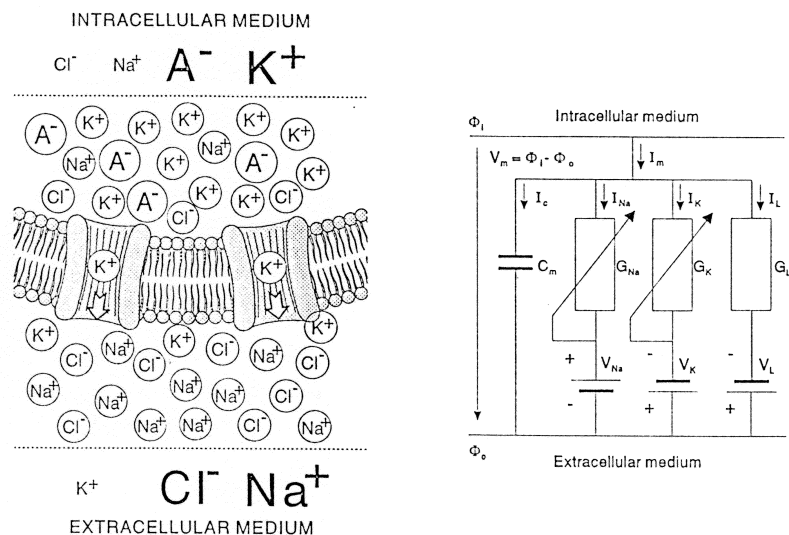
$$\hat{v}_z = \frac{c}{2} \frac{\hat{t}_s}{T_{prf}} \quad (9.16)$$

En gennemgang af denne algoritme samt en lang række andre forhold for disse systemer kan findes i Jensen (1996).

9.3 Elektrofysiologiske signaler

På trods af nerve- og muskelcellers forskellige struktur og funktioner fungerer begge typer celler som ledebaner for bioelektriske signaler. De underliggende mekanismer for disse signalers opståen og udbredelse er i generelle træk identiske og gennemgås indledende under et.

Måling, behandling og fortolkning af signaler fra hjernen (elektroencefalografi), hjertemuskelen (elektrokardiografi) og skeletmuskulaturen (elektromyografi) er imidlertid bestemt af, hvorledes de respektive celler indgår i den helhed, der danner disse organer. I den efterfølgende gennemgang af disse "grafier" beskrives signalkildernes særpræg, målemetoder, samt signalbehandling og -analyse.



Figur 9.7: Cellemembranen adskiller intra- og ekstracellulære ionkoncentrationer. Specifikke ionkanaler (her en kaliumkanal) tillader ioner at diffundere gennem membranen. Et ækvivalentkredsløb repræsenterer membranen som en kondensator i parallelforbindelse med konduktanser for de ionspecifikke natrium, kalium og lækage kanaler. Batterierne repræsenterer de respektive ionstrømmes ligevægtsspændinger (gengivet fra Malmivuo og Plonsey (1995)).

9.4 Cellen som signalgenerator

Nerver og musklers cellevægge er opbygget af lipide dobbeltlag, der er selektivt permeable for en række ioner, bl. a. natrium, kalium, klor, og calcium. Da ionerne i de intra- og ekstracellulære væsker ikke frit kan bevæge sig gennem cellemembranen, adskiller denne således ionerne (ladningerne) på membranens indre og ydre overflader. Denne ladningsadskillelse giver anledning til at betragte cellemembranen som en distribueret kondensator. Samtidigt tillader ionspecifikke kanaler i membranen dog en hvis ladningsmængde at passere membranen, således at membranen modelmæssigt kan betragtes som en parallelkombination af en konduktans og en kondensator (se figur 9.7).

9.4.1 Cellens hviletilstand

For natrium- og kaliumionernes vedkommende opretholdes en stor koncentrationsforskel mellem den intra- og den ekstracellulære væske ved hjælp af en energiforbrugende natrium/kalium-pumpe i cellemembranen. Denne pumpe transporterer tre natriumioner ud af cellen for hver to kaliumioner, der pumpes ind. Derved opnåes en væsentlig større natriumkoncentration uden for cellen som inde og en væsentlig større kaliumkoncentration inde i cellen som udenfor (se figur 9.7).

Koncentrationsforskellene virker som drivkraft for en diffusion af natrium- og kaliumioner gennem deres respektive ionkanaler i retning af faldende koncentration. Natriumioner, der derved diffundere ind i cellen, medbringer imidlertid en positive ladning som bidrager til at opbygge et udadrettet elektrisk felt over membranen. Styrken af dette felt er bestemt af koncentrationsforskellen over membranen, således at en ligevægtstilstand opstår, hvor diffusionsstrømmen og den modsatrettede strøm frembragt af det opbyggede elektriske felt har lige store strømtætheder. For en given ion i sin ligevægtstilstand er net ionstrømmen således nul.

For natriumionernes vedkommende opstår denne ligevægt når potentialet på membranens inderside er

ca. 50 mV mere positivt end på ydersiden. Kaliumionernes koncentrationsgradient er modsatrettet den for natrium, og kaliumionerne er således i ligevægt, når potentialet på membranens inderside er ca. 100 mV mere negativt end på ydersiden.

Kun én potentialforskkel kan eksistere over membranen, og hverken natrium eller kaliumionerne kan derfor forventes at være i deres ligevægtstilstand. I stedet oplades membrankondensatoren til en membran-spænding V_m (defineret som indvendigt potential minus udvendigt potential) svarende til ligevægtstilstanden

$$I_{Na} + I_K + I_L + I_p = 0 \quad (9.17)$$

hvor I_{Na} og I_K betegner natrium og kaliumstrømmene, I_L den samlede passive lækagestrøm fra andre ioner (primært klor og calcium), og I_p natrium/kalium-pumpens ladningstransport. Benyttes Ohm's lov for ionstrømmene fåes:

$$g_{Na}(V_m - E_{Na}) + g_K(V_m - E_K) + g_L(V_m - E_L) = -I_p \quad (9.18)$$

hvor g_{Na} og g_K betegner ionkanalernes konduktanser og E_{Na} og E_K natrium og kaliumsystemernes respektive ligevægtspotentialer (Nernst-potentialer). g_L betegner den totale lækagekonduktans og E_L lækagestrømmens ligevægts-spænding. Membranens hvilespænding V_m er således givet ved:

$$V_m = \frac{g_{Na}E_{Na} + g_K E_K + g_L E_L - I_p}{g_{Na} + g_K + g_L} \quad (9.19)$$

For en celle i hvile er g_{Na} meget mindre end g_K og g_L , og hvilespændingen for V_m ligger derfor mellem E_K (ca. -90 mV) og E_L (ca. -70 mV).

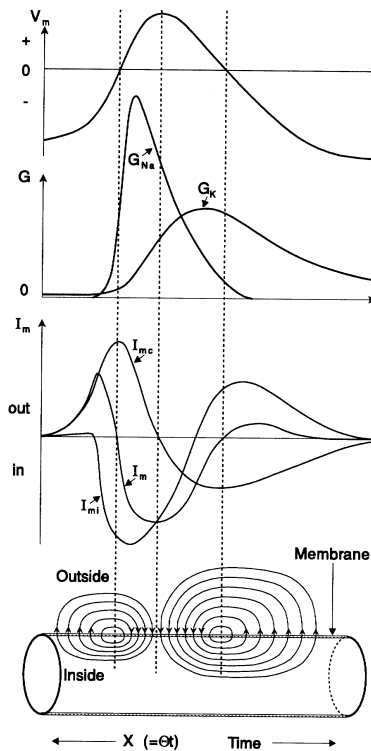
En cellemembran i ligevægtstilstand lækker altså natrium ind i cellen og kalium ud af cellen. Under forbrug af energi (ATP) pumper natrium/kalium-pumpen natrium ud af cellen og kalium ind i cellen, hvorved koncentrationsforskellene opretholdes og membranpotentialet holdes konstant.

9.4.2 Aktionspotential

Forskydes V_m i positiv retning ved hjælp af ekstern stimulation, bliver g_{Na} og g_K afhængig af V_m i stadig stigende grad. Forskydes V_m over en bestemt tærskelværdi, begynder g_{Na} at vokse dramatisk. Den hidrørende influks af natrium aflader membrankondensatoren yderligere, således at V_m forskydes endnu mere i positiv retning. Der opstår derved en kædereaktion, hvor V_m hastigt bevæger sig mod E_{Na} (+50mV).

Natriumkanalen har imidlertid en inaktiveringsmekanisme, der lukker kanalen igen blot få hundrede microsekunder efter at den åbnede. Derved falder natriuminfluksen dramatisk og samtidigt åbner kaliumkanalen og giver anledning til en effluks af positive ladninger. Den hurtige lukning af natriumkanalerne forhindrer V_m i at nå E_{Na} . I stedet når V_m op på ca. 20 mV positiv, hvor den vender og, forårsaget af kaliumeffluksen, bevæger sig ned mod E_K (-100 mV). I_K aftager dog før V_m når E_K , idet g_K aftager, når V_m bliver negativ. V_m returnerer derfor til sin oprindelige hvilespænding. Potentialudsvinget, der her er beskrevet, kaldes et aktionspotential (figur 9.8).

Aktionspotentialets amplitude og varighed varierer betydeligt blandt nerveceller og blandt skelet- og hjertemuskelceller. Amplituden bestemmes i høj grad af værdien for E_{Na} , som igen afhænger af natriums koncentrationsforskel over cellemembranen. Aktionspotentialets varighed bestemmes primært af åbne- og lukkehastighederne for natrium- og kaliumkanalerne. En population af specielt langsomme natrium- og calciumkanaler forlænger således hjerteventrikelcellernes aktionspotentialer med en plateaufase på ca. 300 millisekunder (figur 9.11). Til sammenligning er varigheden på nerve- og skeletmuskel-aktionspotentialer ca. 1 millisekund.



Figur 9.8: Aktionspotentialets kurveform og de underliggende ionstrømme (gengivet fra Malmivuo og Plonsey (1995)).

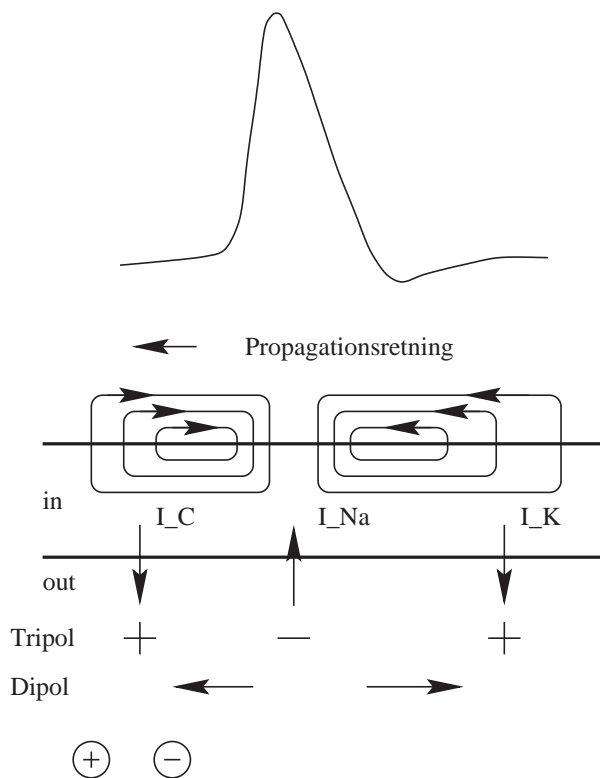
Når et aktionspotentiale vokser op som følge af en lokal stimulation af cellemembranen vil natriumfluksen forårsage en diffusion i cellens længderetning (figur 9.9). Positive ladninger vil derved ankomme til negativt polariserede dele af cellemembranen og påbegynde en depolarisering af membranen på dette sted. Derved påbegyndes processen påny og det betegnes deraf, at aktionspotentialet *propagerer* kontinuerligt over cellens længde.

9.4.3 Extracellulære kildemodeller

Når bioelektriske signaler måles med nålelektroder indsat i f. eks. en muskel, eller med overfladeelektroder placeret på skalpen eller over hjerteregionen, er det ikke cellernes aktionspotentialer, der registreres. Det er derimod de potentialfordelinger, der opstår i rummet omkring cellen som følge af ionstrømmenes udbredelse i det resistive ekstracellulære medium. Da cellemembranens hvilepotentiale eksisterer i en ligevægtstilstand, hvor den totale membranstrøm er nul, følger det heraf, at cellens hviletilstand repræsenteres i ekstracellulære målinger ved signalets basislinje (nullinje) (figur 9.10).

Betragter man et øjebliksbillede af et propagerende aktionspotentiale på en cylinderformet celle, vil man, set fra det ekstracellulære rum, observere et aksialt cellesegment foran aktionspotentialet, hvor strøm forladder cellen i form af en kapacitiv forskydningsstrøm (figur 9.9). Denne strøm fremkommer som følge af natriumionernes interne diffusion i propagationsretningen og forårsager den tidlige fase af membransegmentet depolarisation. Det tilstødende cellesegment under aktionspotentialets opadgående flanke virker som et dræn for ekstracellulært natrium og vil derfor fremstå i det ekstracellulære rum som en negativ strømkilde. Cellesegmentet under aktionspotentialets repolariseringsfase virker som en positiv strømkilde i overensstemmelse med effluksen af positivt ladede kaliumioner.

En aktiv celle kan således betragtes som en kontinuerligt fordelt liniekilde med en central negativ



Figur 9.9: Aktionspotential, de underliggende strømsløjfer, og tripol- og dipolmodellerne.

kilde omgivet af to positive kilder. Er afstanden fra elektroden til aktionspotentialet imidlertid stor i forhold til aktionspotentialets længde, kan man benytte en simplere model bestående af tre punktfornede strømkilder placeret på cellens akse. Denne model betegnes tripolmodellen og defineres matematisk som superpositionen af potentialerne fra de tre punktkilder:

$$\phi_e(\vec{p}, t) = \frac{1}{4\pi\sigma_e} \left(\frac{I_1}{r_1(t)} - \frac{I_2}{r_2(t)} + \frac{I_3}{r_3(t)} \right) \quad (9.20)$$

hvor ϕ_e er det ekstracellulære potentiale i observationspunktet \vec{p} , σ_e er konduktiviteten i det ekstracellulære rum, I_1 , I_2 og I_3 punktkildernes styrke, og r_1 , r_2 og r_3 afstanden fra kilderne til elektroden. Da aktionspotentialet propagerer, ændres punktkildernes afstand til elektroden med tiden t .

Kaliumkanalernes åbnehastighed er langsommere end den for natrium og kaliumeffluksen foregår derfor over et længere cellesegment end natriuminfluksen. Det følger heraf, at strømtætheden I_3 er nogle få tiendedele af I_1 og I_2 . En yderligere simplificering af kildemodellen, hvor I_3 ignoreres, leder herved til den ofte anvendte dipolmodel:

$$\phi_e(\vec{p}, t) = \frac{1}{4\pi\sigma_e} \left(\frac{I_1}{r_1(t)} - \frac{I_2}{r_2(t)} \right) \quad (9.21)$$

Da strømtæthederne I_1 og I_2 har nogenlunde samme styrke (I) og er separeret med en afstand $|\vec{d}|$, der er lille i forhold til afstanden (r) til elektroden, kan de to punktkilder erstattes med en matematisk dipol $\vec{m} = I\vec{d}$, der peger i propageringsretningen:

$$\phi_e(\vec{p}, t) = \frac{I\vec{d} \cdot \hat{r}(t)}{4\pi\sigma_e r^2(t)} = \frac{\vec{m} \cdot \hat{r}(t)}{4\pi\sigma_e r^2(t)} = \frac{|\vec{m}| \cos(\theta(t))}{4\pi\sigma_e r^2(t)} \quad (9.22)$$

Som ved enhver dipolkilde, er potentialet i observationspunktet en funktion af vinklen $\theta(t)$ mellem dipolen \vec{m} og enhedsvektoren \hat{r} , der peger fra kilden til observationspunktet. Generelt er $\theta(t)$ en funktion af tiden. I praksis afhænger dette dog af målesituationen. Hvis $\theta(t) < 90$ grader, måles en monofasisk kurveform, hvorimod en difasisk kurveform måles, hvis $\theta(t)$ ændres mere end 90 grader.

9.5 Elektromyografi

Under aktivering af en skeletmuskel propagerer et aktionspotentiale via en motorisk neuron til en muskels endepladezone (oftest midt på muskelen). Her forgrener neuronen sig og danner synapser med en række muskelfibre, der er jævnt fordelt over et cirkulært tværsnit på 4 - 10 mm i diameter. Neuronen og de muskelfibre, den innerverer, kaldes en motorisk enhed. En enkel rekruteret enhed producerer den mindste kraft, hvormed en muskel kan trække sig sammen. Er der behov for en lidt større kraft, øges impulsfrekvensen for denne motoriske enhed. Kun når den maksimale kontraktionskraft er opnået for den aktiverede enhed, rekrutteres andre motoriske enheder. Dette rekruteringsmønster sikrer en meget fin graduering af muskelkraften.

Kontraktionen i de enkelte muskelfibre forårsages af en pludselig frigørelse af intracellulær calcium trigget af muskelfibermembranens aktionspotentiale. Under kontinuerlig kontraktion af en muskelfiber udbredes der således et aktionspotentiale fra fiberens midte mod endepunkterne, hvor impulsen uddør. Da alle de andre muskelfibre i den samme motoriske enhed også leder et aktionspotentiale, vil superposition af de ekstracellulære strømme fra de enkelte fibre producere et større ekstracellulært potentiale kaldet det motoriske enhedspotentiale (MUP: motor unit potential). Dette potentiale er som regel trifasisk (en negativ spids omgivet af to positive) og måler nogle få hundrede mikrovolt i amplitude i en afstand af 0.2 - 0.5 mm fra den nærmeste aktive fiber. Potentialets varighed måler typisk 8 - 12 millisekunder i intervallet, hvor potentialets amplitude overstiger $5 \mu V$ (figur 9.10).

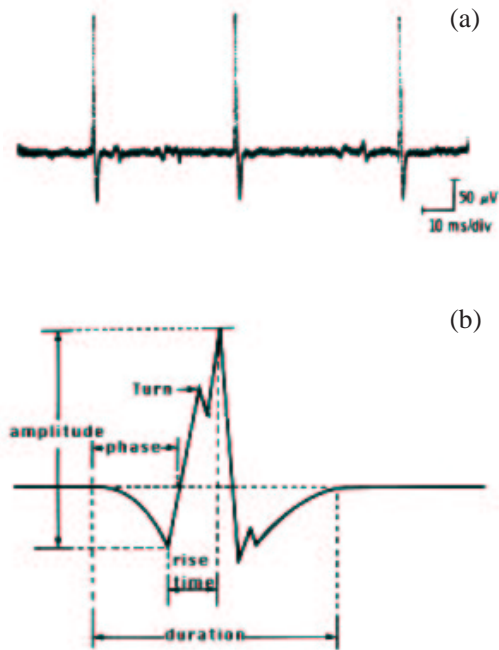
9.5.1 Single Fiber EMG

Benyttes en nålelektrode med et meget lille elektrodeareal, er det muligt at måle det ekstracellulære potentiale fra en enkel muskelfibre. Sådant en elektrode kaldes en "Single-Fiber"elektrode, og den kliniske disciplin, hvori den benyttes kaldes Single-Fiber EMG (SFEMG). Denne teknik benyttes hovedsageligt til at studere intervalvariationer (jitter) mellem de enkelte impulser i et impulstog. Forhøjet jitter antyder, at der kan være patologier i den neuromuskulære synapse.

9.5.2 Koncentrisk EMG

Til studier af de enkelte motoriske enheder benyttes en nålelektrode, der kan opfange potentialerne fra hele den motoriske enhed. Der benyttes enten en monopolar elektrode eller en bipolar elektrode opbygget koncentrisk, således at inderlederen af platin fungerer som positiv elektrode, og den omkringliggende kanyale af stål fungerer som negativ elektrode.

På det motoriske enhedspotentiale bestemmes varigheden af den del af potentialet som overstiger $5 \mu V$, peak-to-peak amplituden, arealet under kurven, samt antallet af positive og negative faser inden for potentialets varighed (figur 9.10).



Figur 9.10: Motoriske enhedspotentialer (a) og dens features (b) (kilde: anonym).

9.5.3 Makro- og overflade EMG

Skal muskelens maksimale kontraktionsevne bedømmes, er man interesseret i at måle den elektriske aktivitet i en stor del af muskelen. Dertil benyttes enten kanylen på den koncentriske elektrode, en specialdesignet makroelektrode, eller overfladeelektroder monteret på huden. Fælles for disse elektroder er en stor aktiv overflade, samt stor afstand til de aktive signalkilder. Begge disse faktorer resulterer i signaler med meget lille amplitude (50 - 5000 μV). På dette signal måles root-mean-square (rms) amplituden samt medianfrekvensen, dvs. den frekvens, der deler powerspektret i to lige store dele. Medianfrekvensen har været benyttet som en træthedsindeks, idet det er blevet observeret, at medianfrekvensen falder, når træthed indtræffer i muskelen.

9.5.4 Signalbehandling af overflade EMG

Da EMG signaler genereres af levende celler med et vist energibehov, påvirkes signalgeneratoren af den hastighed hvormed energi forbruges under muskelarbejde. Generelt må EMG signaler derfor betragtes som *ikke-stationære* signaler. Betragtes imidlertid tilstrækkeligt korte epoker af signalet (0.5 - 1 sekund) kan EMG signalet antages at være *kvasi-stationær*.

Aktionspotentialer, der er frembragt ved elektrisk stimulation, opstår simultant og propagerer synkront langs muskelens længde. Det superponerede EMG signal, der opfanges af elektroden, er derfor *deterministisk*. Under normal voluntær kontraktion aktiveres de enkelte motoriske enhedspotentialer uafhængigt af hinanden. Det voluntære EMG signal er derfor *stokastisk* af natur.

Ofte er man interesseret i at sammenligne to EMG signaler $X(t)$ og $Y(t)$ og bestemme om f. eks. $Y(t)$ blot er en skaleret version af $X(t)$, det vil sige:

$$Y(t) = hX(kt) \quad (9.23)$$

eller om $Y(t)$ afviger mere generelt fra $X(t)$. Koefficienten h betegner en amplitudeskalering og k betegner en spektral komprimering. Kun når signalerene er deterministiske kan k også fortolkes som en tidsmæssig ekspansion.

I forskellige eksperimentelle sammenhænge kan man tillægge $X(t)$ og $Y(t)$ forskellige betydninger. Man kunne f. eks. forestille sig at signalerene $X(t)$ og $Y(t)$ er målt simultant med hver sin elektrode anbragt på samme muskel. Hvis de to elektroder registrerer fra nøjagtigt den samme population af muskelfibre, vil den bioelektriske kilde være identisk. Afstanden fra kilden til elektroderne vil derimod oftest være forskellig og dette forhold vil give anledning til både en amplitudeskalering og spektral komprimering af det ene signal i forhold til det andet.

I forsøg, hvor man placerer flere elektroder på samme ben med det formål at registrere forskellige musklers arbejde under gang eller løb, er man specielt interesseret i at undgå *crosstalk*, hvor elektroden over muskel Y måler et signal fra muskel X. Det signal $Y(t)$ man her antager at hidkomme fra muskel Y kan i virkeligheden vise sig at være en skaleret version af $X(t)$.

Crosstalk opstår på grund af volumenledning. De elektriske strømsløjfer, der opstår i en aktiv muskel, udbreder sig i de omkringliggende muskler og giver anledning til en spatial potentialfordelinger, der overskrider den aktive muskels anatomiske afgrænsninger. Da potentialfordelingens amplitude aftager med kvadratet på afstanden (jævnfør lign. 9.22), vil potentialfordelingens gradient være meget lille i feltpunkter, der ligger langt fra kilden (fjernfeltet). Benytter man en differentiell måleopstilling med en bipolar elektrodekonfiguration, kan man delvis undertrykke fjernfeltet (crosstalk) men stadigvæk registrere nærfeltet.

I studier af muskeltræthed måler man et EMG signal fra samme muskel over lang tid for at bestemme muskeltræthedens indvirkning på signalets karakteristika. I denne anvendelse kan man fortolke signalet X som værende EMG signalet, der måles ved forsøgets begyndelse. Signalet $Y(t)$ måles derefter med jævne mellemrum for at undersøge EMG signalet under muskeltræthedens gradvise indtræden. I eksperimenter af denne slags har man påvist en spektral komprimering af EMG signalet ved muskeltræthedens indtræden, og det er derfor af interesse at bestemme, hvorvidt der er tale om en ren skalering, eller om der sker en generel forandring i spektralfordelingen.

I signalbehandlingen af EMG signaler er der således behov for at kunne estimere skaleringskoefficienterne h og k og nyttige relationer til dette brug udledes fra velkendte relationer i signalteorien. Hvis $Y(t)$ er en skaleret version af $X(t)$, gælder at $Y(t)$ har autokorellationen:

$$R_Y(\tau) = \frac{h^2}{k} R_X(k\tau) \quad (9.24)$$

og effektspektret:

$$S_Y(f) = \frac{h^2}{k^2} S_X\left(\frac{f}{k}\right) \quad (9.25)$$

Defineres middelfrekvensen som:

$$f_{X,mean} = \frac{\int_0^\infty f S_X(f) df}{\int_0^\infty S_X(f) df} \quad (9.26)$$

og medianfrekvensen som:

$$\int_0^{f_{X,med}} S_X(f) df = \int_{f_{X,med}}^\infty S_X(f) df = \frac{1}{2} \int_0^\infty S_X(f) df \quad (9.27)$$

kan det let vises at:

$$k = \frac{f_{Y,med}}{f_{X,med}} = \frac{f_{Y,mean}}{f_{X,mean}} = \frac{\tau_{X0}}{\tau_{Y0}} \quad (9.28)$$

hvor der gælder at:

$$R_X(\tau_{X0}) = R_Y(\tau_{Y0}) = 0 \quad (9.29)$$

Definerer vi endvidere den ensrettede middelværdi som:

$$X_{RA} = \frac{1}{T} \int_0^T |X(t)| dt \quad (9.30)$$

og RMS værdien som:

$$X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt} \quad (9.31)$$

får vi følgende udtryk til bestemmelse af amplitudeskaleringen:

$$h = k \frac{Y_{RA}}{X_{RA}} = \sqrt{k} \frac{Y_{RMS}}{X_{RMS}} \quad (9.32)$$

Opdeles en muskelkontraktion på f. eks. 30 sekunder i epoker på hvert 1 sekund, kan udtrykkene i lign. (9.28) og (9.32) benyttes til at beregne skaleringskoefficienterne $k(t)$ og $h(t)$ for hver epoke. Man opnår således en tidsrække, der kan påvise eller afvise en progressiv skalering af EMG signalets kurveform.

Alternativt kan man definere forskellige parametre, der benytter effektspektrets fordeling til at skelne mellem en simpel skalering og en egentlig forandring i signalets kurveform. Ved denne fremgangsmåde ansues det *normaliserede* effektspektrum (\hat{S}_X) som en sandsynlighedsfordeling, for hvilken man kan definere momenter af orden n :

$$M_{X,n} = \int_0^\infty f^n \hat{S}_X(f) df \quad (9.33)$$

Hvis signalet $Y(t)$ er en ren skalering af $X(t)$ jævnfør lign. (9.23), fåes følgende sammenhænge mellem effektspektrenes momenter:

$$M_{Y,n} = h^2 k^{n-1} M_{X,n} \quad (9.34)$$

og

$$\hat{M}_{Y,n} \equiv \frac{M_{Y,n}}{M_{Y,0}} = k^n \frac{M_{X,n}}{M_{X,0}} \equiv k^n \hat{M}_{X,n} \quad (9.35)$$

Benyttes momentbegrebet kan vi beskrive effektspektret ved dets middelværdi:

$$f_{X,mean} = \frac{\hat{M}_{X,1}}{\hat{M}_{X,0}} \quad (9.36)$$

dets varians

$$\sigma_X^2 = \hat{M}_{X,2} - \hat{M}_{X,1}^2 \quad (9.37)$$

dets skævhed (skewness)

$$Skew_X = \frac{(\hat{M}_{X,3} - 3\hat{M}_{X,2}\hat{M}_{X,1} + 2\hat{M}_{X,1}^3)}{\sigma_X^3} \quad (9.38)$$

og dets kurtosis:

$$Kurt_X = \frac{(\hat{M}_{X,4} - 4\hat{M}_{X,3}\hat{M}_{X,1} + 6\hat{M}_{X,1}^2\hat{M}_{X,2} - 3\hat{M}_{X,1}^4)}{\sigma_X^4} \quad (9.39)$$

Da hverken skewness eller kurtosis ændres ved skaleringen angivet i lign. (9.23) gælder der:

$$Skew_Y = Skew_X \quad (9.40)$$

og

$$Kurt_Y = Kurt_X \quad (9.41)$$

En anden parameter, som er uafhængig af skalering, er *variationskoefficienten* C defineret ved forholdet mellem fordelings spredning og dens middelværdi:

$$\begin{aligned} C_Y &= \frac{\sigma_Y}{M_{Y,1}/M_{Y,0}} = \frac{M_{Y,0}}{M_{Y,1}} \left[\frac{M_{Y,2}}{M_{Y,0}} - \left(\frac{M_{Y,1}}{M_{Y,0}} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \frac{k\sigma_X}{M_{Y,1}/M_{Y,0}} = \frac{\sigma_X}{M_{X,1}/M_{X,0}} = C_X \end{aligned} \quad (9.42)$$

Beregnes $Skew(t)$, $Kurt(t)$, og $C(t)$ for en serie signalepoker, vil en ren skalering af EMG signalet bevirke at:

$$\frac{C_Y(t)}{C_Y(0)} = \frac{Skew_Y(t)}{Skew_Y(0)} = \frac{Kurt_Y(t)}{Kurt_Y(0)} = 1 \quad (9.43)$$

I situationer, hvor lign. (9.42) ikke er gyldig, skyldes det ændrede effektspektrum altså en generel ændring i EMG-signallets kurveform.

Anvendeligheden af ovennævnte metoder afhænger i stor grad af, hvor godt et estimat af effektspektret, der kan opnåes. Hvis der stimuleres med en pulsfrekvens, der er så stor, at tidsintervallet mellem de elektriske stimuli er mindre en muskelpotentialets varighed, vil sidstnævnte blive trunkeret af det elektriske kredsløb, der undertrykker stimuluspulsens og forhindrer forstærkeren i at gå i mætning. Ekspanderes det trunkerede signal til et periodisk signal introduceres højfrekvent støj på grund af diskontinuiteten. Anvendes et vindue, opstår der frekvenslækage på grund af sidebåndene. De her nævnte faktorer bidrager til et unøjagtigt estimat på frekvensspektret og andre metoder (f. eks. autoregressiv analyse) til estimering af effektspektret bør derfor overvejes.

9.6 Elektrokardiografi

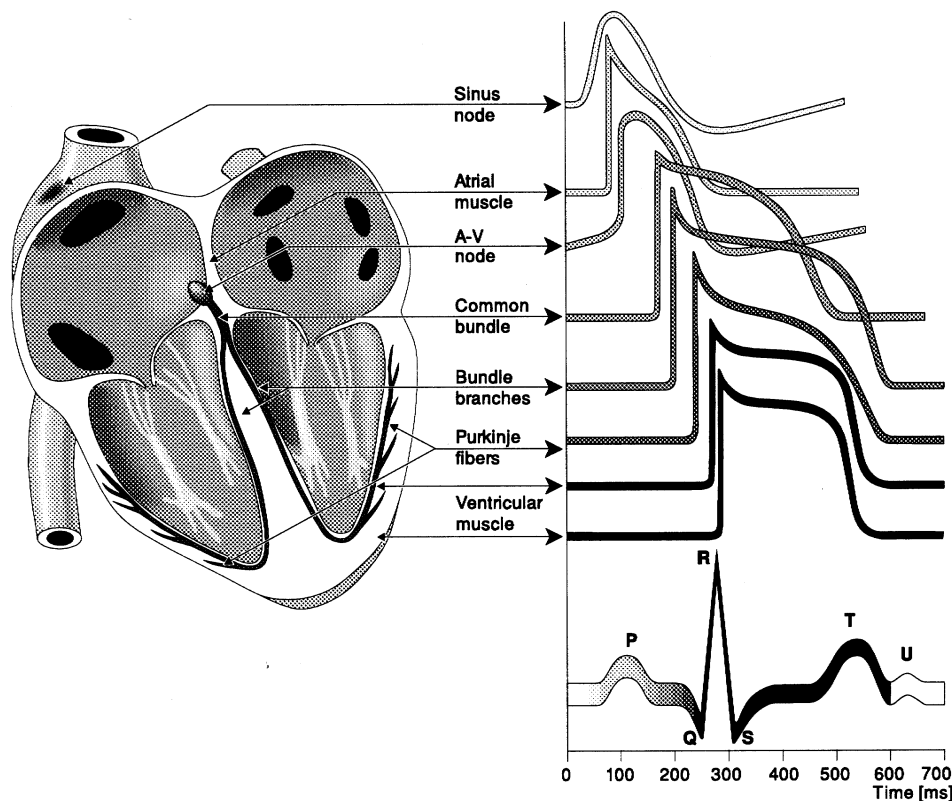
Hjertets pumpeeffekt forudsætter en yderst kompleks koordinering af de enkelte muskelfibres kontraktion. I modsætning til skeletmuskulaturen, kan aktionspotentialet i en hjertefiber vandre fra én muskelfiber til den næste, både i aksial og radial retning. På denne måde kan hjertets aktionspotentiale opstå i et lille område og derefter udbrede sig overalt i hjertemuskulaturen.

9.6.1 Hjertet som signalkilde

En kontraktionscyklus påbegyndes således med udbredelse af en aktionspotentialebølge fra sinusknuden på højre forkammers top ned mod hjertekamrene (figur 9.11, 9.13 og 9.14). AV knuden i overgangen mellem forkamrene og hjertekamrene leder impulsen ned i den væg, der adskiller højre og venstre hjertekamre. Herfra udbreder en aktionspotentialefront sig i højre hjertekammer og, lidt forsinket, i venstre hjertekammer. I hjertekamrene udbreder bølgerne sig fra ventrikelvæggenes inderside (endocardium) til deres yderside (epicardium).

I ventriklerne er aktionspotentialets varighed længst på endocardium og kortest på epicardium (figur 9.11). Når ventriklerne begynder at repolarisere, sker det derfor først på epicardium og sidst på endocardium. Dette forhold bevirker at repolariseringsbølgen trækker sig tilbage på samme måde som en vandbølge ved strandkanten. Da cellerne ikke kan generere et nyt aktionspotential, før de er repolariseret, sikrer denne udbredelses- og tilbagetrækningssekvens, at hele hjertet er repolariseret og klar til en ny kontraktion, før sinusknuden igen kan sætte en cyklus igang.

Som beskrevet i figur 9.9 kan bølgefronten på en infinitesimalflade betragtes elektrisk som en elementær dipol, der bevæger sig i bølgefrontens udbredelsesretning. Er EKG-elektroden imidlertid placeret i en



Figur 9.11: Hjertets specialiserede ledningsnet og dets forskellige aktionspotentialer (gengivet fra Malmivuo og Plonsey (1995)).

afstand fra hjertet, der er stor i forhold hjertets dimension, kan dipolerne på bølgefrontens mange infinitesimalflader summeres til en enkel repræsentativ hjertedipol, der varierer både i intensitet og retning i løbet af en hjertecyklus.

Specielt med hensyn til EKG-elektroder placeret på brystkassen er hjertedipolmodellens afstandskriterium kun dårligt opfyldt. Ikke desto mindre er hjertedipolmodellen den mest anvendte indenfor klinisk EKG takket være dens simple anvendelse og fortolkning.

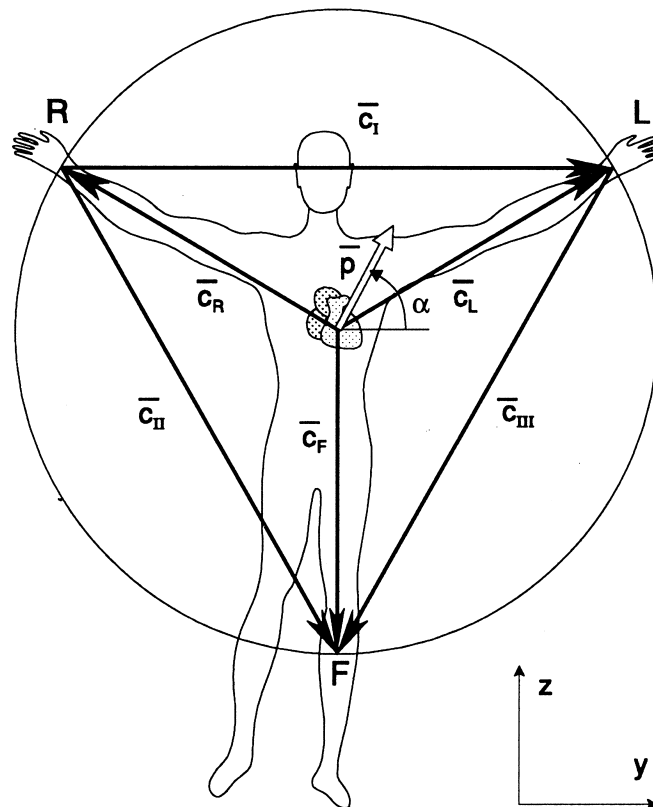
9.6.2 EKG elektrodekonfigurationer

For en tidsvarierende hjertedipol $\vec{H}(t)$ måler elektroder i punkterne A og B jævnfør lign. (9.22) potentialerne:

$$\phi_A(t) = \frac{\vec{H}(t) \cdot \hat{r}_A}{4\pi\sigma r_A^2} \quad \text{og} \quad \phi_B(t) = \frac{\vec{H}(t) \cdot \hat{r}_B}{4\pi\sigma r_B^2} \quad (9.44)$$

hvor σ betegner kroppens gennemsnitlige konduktivitet, og enhedsvektorerne \hat{r}_A og \hat{r}_B retningen fra dipolkilden til henholdsvis A og B . Da man i enhver bioelektrisk måling kun kan måle relative potentialer, måles differenssignalet:

$$\begin{aligned} \phi_{AB}(t) &= \phi_A(t) - \phi_B(t) \\ &= \vec{H}(t) \cdot \left(\frac{\hat{r}_A}{4\pi\sigma r_A^2} - \frac{\hat{r}_B}{4\pi\sigma r_B^2} \right) \\ &= \vec{H}(t) \cdot (\vec{L}_B - \vec{L}_A) \\ &= \vec{H}(t) \cdot \vec{L}_{BA} \end{aligned} \quad (9.45)$$



Figur 9.12: Einthoven trekanten (gengivet fra Malmivuo og Plonsey (1995)).

Ved hjælp af reciprocitetssætningen ses det, at \vec{L}_A og \vec{L}_B er defineret som de elektriske felter, der opstår i dipolpunktet, når der påtrykkes en enhedsstrøm gennem elektroderne A og B , respektivt. Leadvektoren \vec{L}_{BA} repræsenterer således den elektriske feltvektor i kildepunktet, når der påtrykkes en positive enhedsstrøm i elektrode B og en negative enhedsstrøm i elektrode A . Dette elektriske felt benævnes *leadfeltet* og teorien kaldes *leadfeltteorien*.

Potentialdifferensen mellem den positive elektrode A og den negative elektrode B er altså proportionalt med skalarproduktet mellem hjertevektoren og leadvektoren. Maksimal amplitude opnåes derfor, når de to vektorer er parallelle, hvorimod ingen signal måles, når de er vinkelrette på hinanden.

Da den elektriske depolarisationsbølge udbredes først i højre hjertekammer, og derefter med lidt forsinkelse i venstre hjertekammer, vil hjertevektoren først pege fremad og til højre, for derefter i løbet af 20 millisekunder at svinge fremad og mod venstre (figur 9.13 og 9.14). Det er altså umuligt at opsamle al information om hjertevektoren med et enkelt elektrodepar. Istedet benytter man sig af flere elektrodepar, orienteret på en sådan måde, at der ved deres lineære kombinationer kan dannes ortogonale leadvektorer. Med disse ortogonale leadvektorer kan man måle de kartesiske komponenter af hjertevektoren under hele dets cyklus og derefter rekonstruere hjertevektorens tredimensionelle bane. Denne procedure betegnes *vektorkardiografi*.

Den mest kendte leadkonfiguration består af tre elektroder forbundet til højre og venstre håndled, samt venstre fod (figur 9.12). Elektroderne kombineres, så venstre hånd måles med reference til højre hånd (Lead I), venstre fod med reference til højre hånd (Lead II) og venstre fod med reference til venstre hånd (Lead III).

Selv om elektroderne er påhæftet ved håndledene og ankelen, måler de i virkeligheden potentialerne,

hvor ekstremiteterne møder kroppen. Dette skyldes, at instrumentforstærkeren har en meget høj indgangsimpedans ($> 1M\Omega$), og at der derfor ikke løber en nævneværdig strøm gennem ekstremiteterne. Disse tre lead danner derfor en ligesidet trekant betegnet *Einthoven trekanten*.

Det bemærkes, at lead I umiddelbart giver den vandrette komponent (y -komponenten) af hjerterektoren i det frontale plan. Lead II og III ligger begge i det frontale plan og en såkaldt ændret lead (på engelsk: *augmented lead*) aV_F kan dannes ved at måle venstre fods potentiale med reference til gennemsnittet af hændernes potentialer. aV_F danner således en leadvektor, der peger lodret nedad i det frontale plan, og den måler derfor hjerterektorens negative z -komponent.

Da Einthoven trekanten ligger i det frontale plan kan denne ikke umiddelbart benyttes til at måle hjerterektorens x -komponent i det sagitale plan. Man kan imidlertid danne et centralt referencepunkt inde i kroppen ved at tage middelværdien af ekstremitetspotentialerne. Dette referencepunkt betegnes *Wilson's Central Terminal* og dannes ofte elektronisk ved at forbinde ekstremiteterne til en summationsforstærker via tre $5k\Omega$ modstande. Hjerterektor komponenter i det transversale plan fås derefter ved at måle potentialet på brystkassen med reference til Wilson's Central Terminal. Normalt benyttes der seks såkaldte *precordial lead*, hvor V_2 peger fra hjertet ud gennem brystkassen lige til venstre for brystbenet i det sagitale plan. V_1 udstråler 30 grader til højre for V_2 , V_3 30 grader til venstre, V_4 yderligere 30 grader til venstre osv. Det følger heraf at V_2 måler hjerterektorens x -komponent og V_5 hjerterektorens y -komponent.

Tre Einthoven lead plus tre augmented lead plus seks precordial lead giver i alt 12 lead. Det kan imidlertid vises, at kun 8 lead er uafhængige. Selv om alle 12 lead benyttes rutinemæssigt i klinisk EKG, er det dog et fåtal af EKG-afdelinger, der beregner vektorkardiogrammet, og da som regel kun i forbindelse med forskning.

9.6.3 EKG-signalers karakteristik og signalbehandling

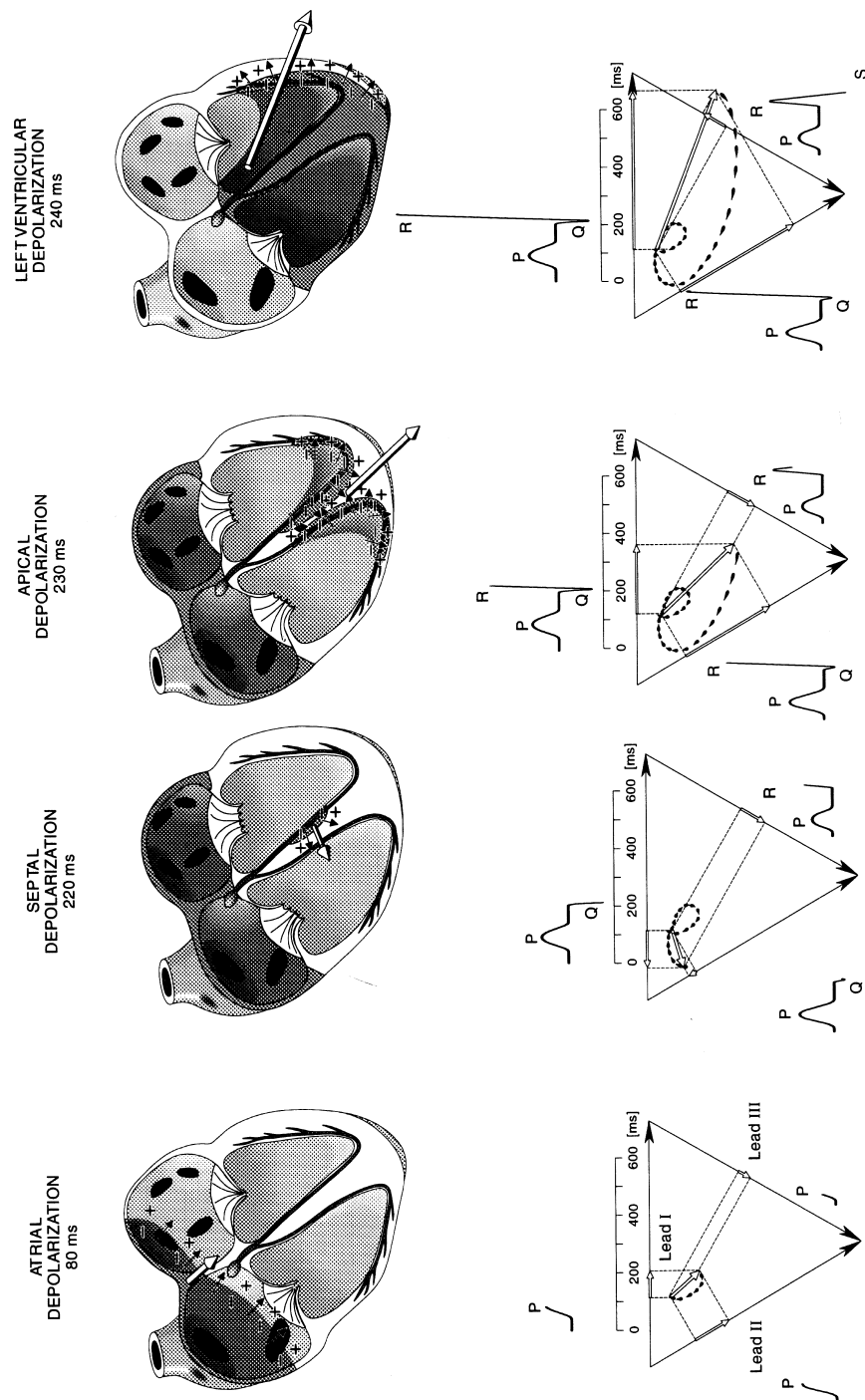
Figur 9.13 viser bølgefrontens udbredelse i forkamrene, i septrum og i højre og venstre hjertekammer. I forkamrene giver hjerterektorens skalarprodukt med leadvektorerne en positive tak i alle tre lead. Denne positive tak kaldes P-takken. I den tidlige fase af højre hjertekammers depolarization peger hjerterektoren mod højre og giver derved negative Q-takker i lead I og II og en positive R-tak i lead III. Når depolarizationen starter i venstre hjertekammer, svinger hjerterektoren hurtigt mod venstre og skaber derved en positiv R-tak i alle lead.

I den sidste fase af depolarizationen (figur 9.14) svinger hjerterektoren tilstrækkeligt til venstre til at lead III (og til en vis grad lead I) skifter fortegn og giver anledning til en negativ tak, S-takken. Under repolarizationen giver hjerterektoren anledning til en tak, T-takken, der er positiv i lead I og II, og negativ i lead III.

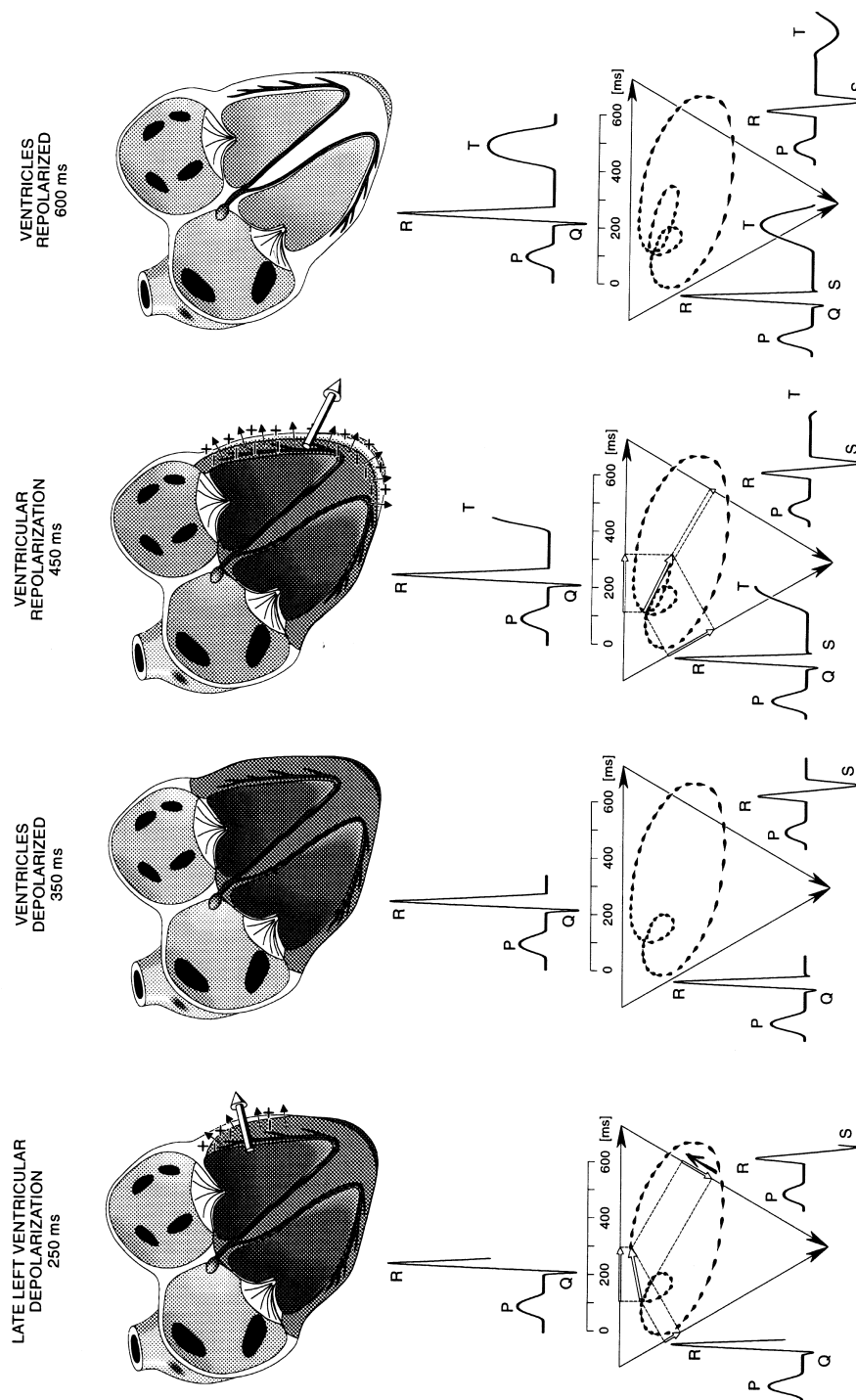
Det erindres altså at P-takken skyldes forkamrenes depolarization, QRS-takken hjertekamrenes depolarization, og T-takken hjertekamrenes repolarization. Takken, der burde opstå under forkamrenes repolarization, er begravet i QRS-komplekset.

EKG signalets udseende kvantiseres ved følgende features: PR-interval, QT-interval, P-areal, P-amplitude, PR-segment, Q-varighed, Q-amplitude, R-amplitude, R-varighed, S-varighed, S-amplitude, QRS-varighed, QRS-amplitude, QRS-areal, ST-segment, ST-hældning, T-varighed, T-amplitude, T-areal, samt R-R intervallet, hvis reciprokke værdi jo giver hjertets slagfrekvens. Det bemærkes, at der skelnes mellem *intervaller* og *segmenter*. Et interval måler tidsrummet mellem starten på to takker, hvorimod et segment måler længden af nullinjen mellem to på hinanden følgende takker.

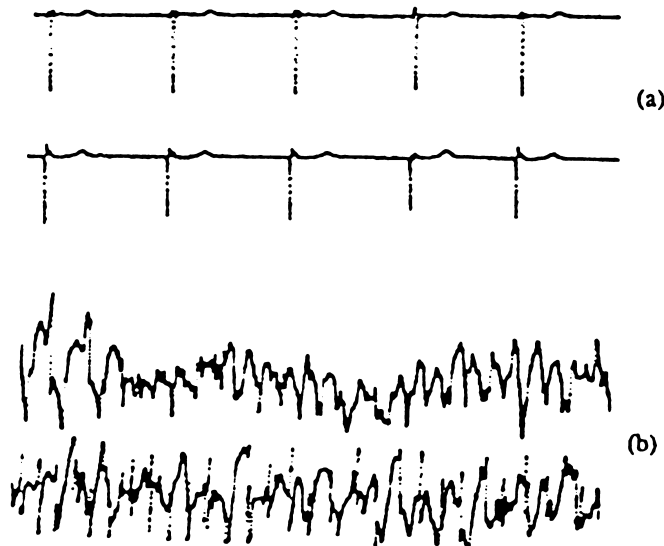
Hvis den længste RR-interval overstiger den korteste med mere end 0.16 sek. er der tegn på sinusarrytmi. Overstiger PR-intervallet 0.2 sek., er der tegn på blokade i AV-knuden. Overstiger QRS-varigheden 0.12



Figur 9.13: Hjerterimpulsens tidlige udbredelse og manifestationen i de tre lead (gengivet fra Malmivuo og Plonsey (1995)).



Figur 9.14: Hjerterimpulsens sene udbredelse og manifestationen i de tre lead (gengivet fra Malmivuo og Plonsey (1995)).



Figur 9.15: EKG signaler målt to steder i forkamrene under (a) normal sinusrytme og under (b) forkammerfibrillation (gengivet fra Sahakin et al. (1990)).

sek., er der tegn på blokade i højre og/eller venstre ledningsbunt (se figur 9.11). En P-tak amplitude på mere end 0.25 mV i lead III tyder på hypertrofi (forstørrelse af) i højre forkammer. Hypertrofi i venstre forkammer giver anledning til en P-tak i lead V_1 med en negativ amplitude på mere end 0.1 mV, og varigheden overstiger 0.04 msek. Hypertrofi i højre hjertekammer ses ved at R-takken i lead V_1 overstiger 0.7 mV. Hypertrofi i venstre hjertekammer forbindes med en høj S-tak i lead III, V_1 og V_2 (> 2.5 mV) samt en høj R-tak i lead V_5 og V_6 (> 3.5 mV).

9.6.4 Behandling af EKG-signaler.

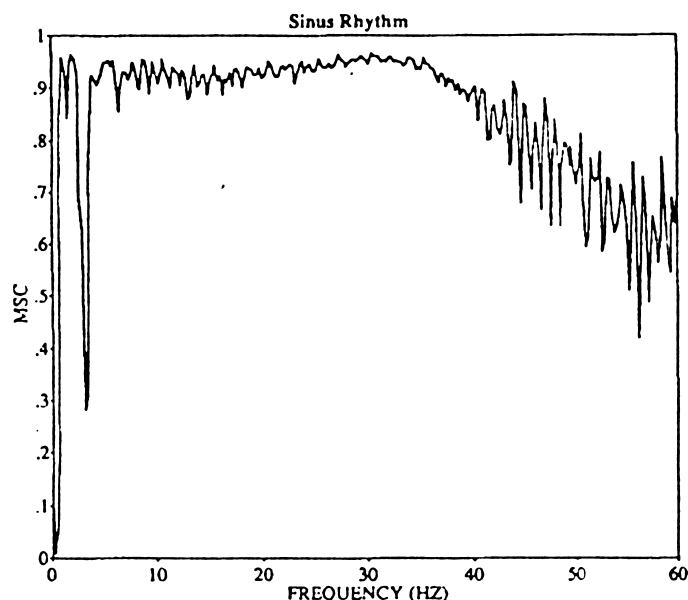
Signalbehandling af EKG-signaler kan have mange formål. To områder, der har modtaget speciel stor opmærksomhed i litteraturen, er datareduktion og analyse af hjertearytmi. Her skal kun kort beskrives et eksempel på sidstnævnte problemstilling.

Indopererede automatiske defibrillatorer måler EKG-signaler direkte på hjertemuskulaturen for at detektere uregelmæssige hjertearytmer. Signalbehandlingens opgave er her at skelne mellem normale hjertearytmer og de kaotiske rytmer, der opstår, når en del af hjertemuskulaturen fibrillerer (se figur 9.15).

Hvis algoritmen detekterer fibrillation, sender defibrillatoren en kraftig strømpuls ind i hjertemuskulaturen for at depolarisere hele hjertet. Hjertet repolariserer derefter på normal vis og sinusknuden genoptager sin funktion som rytme-generator. Fejlfortolker algoritmen derimod de målte EKG-signaler og giver en defibrillationspuls til et hjerte, der slår normalt, kan det have fatale konsekvenser for personen.

Da hjertearytmen varierer dramatisk selv under normale omstændigheder, er det ikke tilstrækkeligt blot at benytte en slagfrekvenstærskel som beslutningsgrundlag. Et bedre grundlag er det velkoordinerede signaludbredelsesmønster, der kendetegner det normale hjerte, og det faktum at denne koordination forsvinder totalt i det fibrillerende hjerte (se figur 9.15).

En rimelig fremgangsmåde er derfor at monitorere korrelationen mellem EKG-signaler målt to forskellige steder i hjertemuskulaturen. Til dette formål anvendes den såkaldte *Magnitude-Squared Coherence*



Figur 9.16: MSC spektret for en normal sinusrytme målt i højre forkammer (gengivet fra Sahakin et al. (1990)).

Function (MSC), der er en normaliseret version af krydseffektspektret. MSC er defineret som:

$$K_{XY}(f) = \frac{|S_{XY}(f)|^2}{S_X(f)S_Y(f)} \quad (9.46)$$

hvor $S_{XY}(f)$ betegner krydseffektspektret og $S_X(f)$ og $S_Y(f)$ effektspektrene for signalerne $x(t)$ og $y(t)$.

Synkroniciteten mellem de målte signaler under normal sinusrytme producerer i koherensfunktionen en værdi meget tæt på en (figur 9.16), hvorimod de lidet korrelerende signaler målt under forkammerfibrillation giver sig udslag i en koherensværdi under 0.2 (figur 9.17). Vi skal illustrere koherensbegrebet nærmere i forbindelse med behandlingen af EEG-signaler.

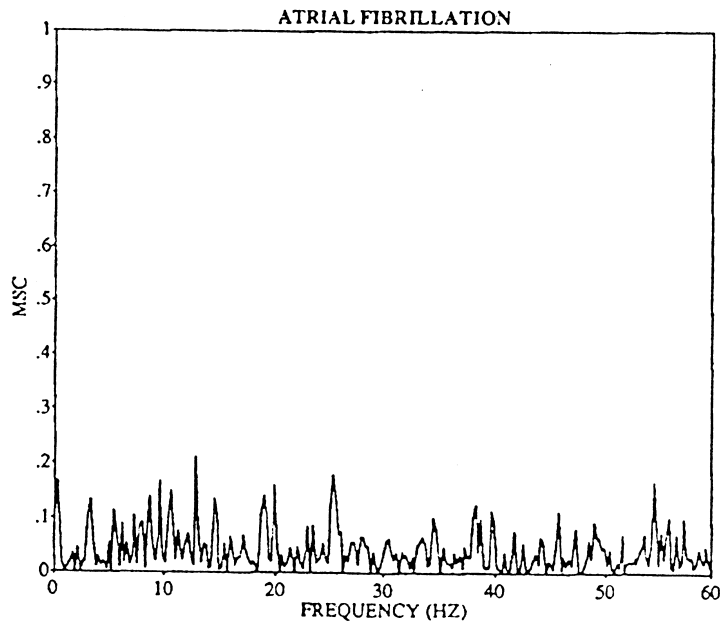
9.7 Elektroencefalografi

Med dens tre hovedkomponenter, storehjernen (cerebrum), lillehjerne (cerebellum) og hjernestamme, er hjernen et yderst kompliceret organ. Med hensyn til behandling og fortolkning af bioelektriske signaler målt på skalpen er vi dog her kun interesseret i det yderste lag af storehjernen, cortex.

Figur 9.18 viser storehjernens fire lapper samt deres respektive associationer. Frontallappen kontrollerer det emotionelle stadie samt intellektuelle aktiviteter. Den temporale lap indeholder hørecenteret, parietallappen indeholder de sensoriske centre, og occipetallappen indeholder synscenteret. Lige foran det sensoriske område findes den motoriske cortex, der kontrollerer bevægeapparatet.

Cortex, der kun er ca. 1 cm tyk, er opdelt i seks lag som vist i figur 9.19. I disse lag sidder de såkaldte store pyramidalceller orienteret radiale med dendritterne pegende ud mod skalpen og aksonet i modsat retning. Dendritterne former synapser lige under hjernens overflade med tusindvis af andre neuroner.

Eksiterende synapser foranlediger en influks af ioner i dendritterne, og der opstår derved en negativ kilde i hjernens ekstracellulære rum (se figur 9.20). De indstrømmende ioner diffunderer ned mod cellekernen



Figur 9.17: MSC spektret under fibrillation i forkamrene (gengivet fra Sahakin et al. (1990)).

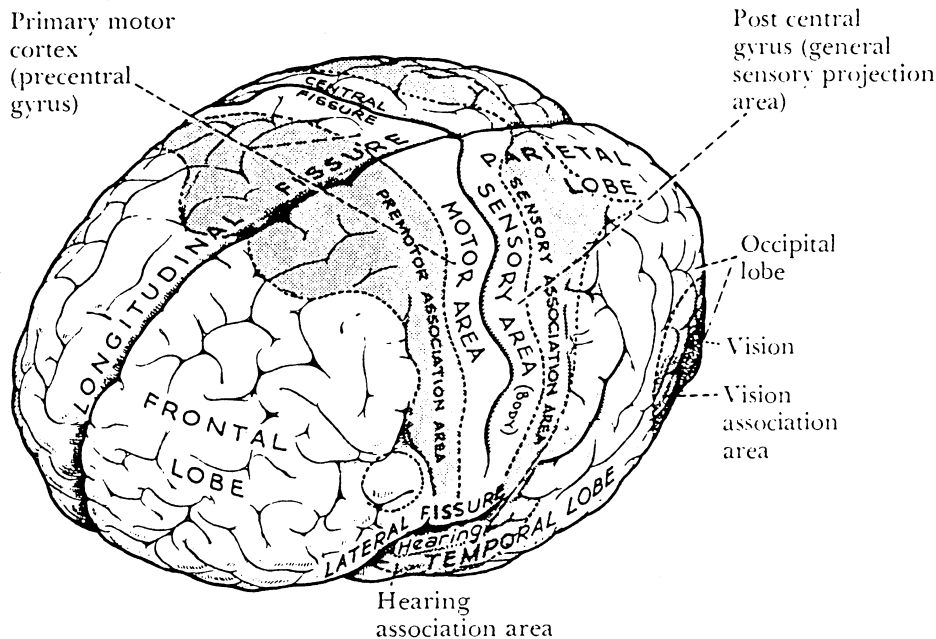
(soma), hvor de forlader cellen som en positiv strøm. Dendritten virker derved som en dipol med den negative ende pegende mod skalpelektroden. For en inhiberende synaps er dipolen modsatrettet.

Da den samme dendrit danner mange eksiterende og inhiberende synapser, er dipolens polaritet til enhver tid bestemt af integrationen af alle eksiterende og inhiberende synaptiske aktiviteter. EEG-signaler, der måles på skalpen, er derfor *stokastisk* af natur og fremtræder som lavfrekvente positive og negative bølger repræsenterende den vekselvirkende synaptiske aktivitet i et lille område under elektroden. EEG-signaler, som opstår som følge af repeterende stimuli (*evoked potentials*) er *deterministiske* af natur, ligesom det var tilfældet for evoked EMG-signaler.

I eksperimenter, hvor der er målt EEG signaler både på skalpen og i hjernemassens dybde (subduralt), har man påvist en større koherens mellem signaler målt forskellige steder på skalpen end mellem skalp- og subdurale signaler. Disse opdagelser har ledt til den konklusion, at der er større neural interkonnektivitet mellem pyramidalceller i cortex end mellem cortex og dybereliggende strukturer. I stedet for at betragte bioelektriske kilder i cortex som individuelle dipoler, antager man nu at skalpsignaler stammer fra koherente dipollag.

Et EEG signals frekvensindhold opdeles i fire frekvensbånd: Delta (0.5 - 4 Hz), theta (4 - 8 Hz), alpha (8 - 13 Hz), og beta (13 - 30 Hz). Figur 9.21 viser eksempler på typiske EEG-bølger og deres oprindelse på cortex. Alpha-aktivitet findes i occipitallappen og undertrykkes kraftigt, når personen har åbne øjne, når personen forskrækkes og under mental aktivitet. Beta-aktivitet måles over frontallappen, men denne aktivitet påvirkes ikke af de ovenfor nævnte alpha-modulerende faktorer. De lavfrekvente bånd giver nyttig information om en persons søvnstadium (ved f.eks. søvnanalyse og narkose). Lokal delta-aktivitet med manglende højre/venstre symmetri findes i ca. 85% af alle tilfælde af tumor i cortex. Derudover giver EEG signaler diagnostisk information om en persons emotionelle tilstand (f. eks. angstneuroser og epilepsianfald), samt om responsniveau på sansestimulationer.

For at kunne opsamle tilstrækkelig diagnostisk information under en klinisk EEG-undersøgelse måles 21 signaler på standardiserede punkter på skalpen. Til dette formål placeres 21 elektroder på skalpen efter det såkaldte 10-20 system (se figur 9.22). Alle elektrodesignaler opsamles digitalt med venstre (A_1) eller højre (A_2) øre som referencepunkt. På computerbaserede EEG-systemer kan man derefter vælge



Figur 9.18: Storehjernens fire lapper: frontal, parietal, temporal, og occipital (gengivet fra Webster (1998)).

standard leadkonfigurationer via software, hvorved det benyttede referencepunkt subtraheres bort. Hvis vi f. eks. måler de to signaler F_3 og C_z med A_1 som reference, kan vi senere danne et nyt differenssignal, som er uafhængig af A_1 :

$$C_z - F_3 = (C_z - A_1) - (F_3 - A_1) \quad (9.47)$$

uden at skulle rearrangere elektrodeforbindelserne og foretage nye målinger.

9.7.1 Behandling af EEG-signaler i tidsdomænet.

Tager man samplerværdierne og fordeler dem i amplitudeklasser, opnår man et amplitudehistogram, der under normale omstændigheder vil have en gaussisk fordeling. Fra denne kan man bestemme middellamplituden og variansen (her kaldet standard amplitude). For en normalfordeling er højereordensmomenter nul. Derfor kan momenter af 3. og 4. orden, som f. eks. *skewness* og *kurtosis*, bruges til at bestemme EEG-amplitude-histogrammers afvigelse fra en normalfordeling.

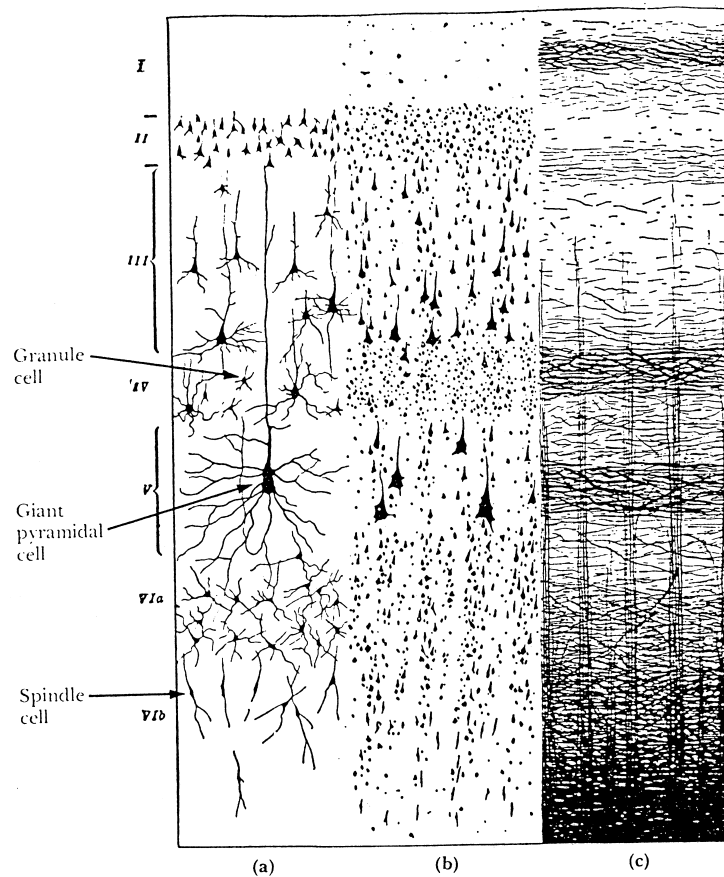
Middellamplituden er normalt nul, og en afvigelse herfra skyldes ofte tekniske årsager, som f. eks. drift i forstærkere. Variansen er direkte relateret til signaleffekten, idet et fladt signal har lav varians og et stærkt oscillerende signal har stor amplitudevarians.

Skewness er et mål for et amplitudehistograms asymmetri, dvs. om et EEG signal er symmetrisk omkring nullinjen. Denne symmetri forsvinder, når signalet indeholder mange monofasiske potentialer. Skewness kan måles som *Moment Coefficient of Skewness*:

$$Skew_{mc} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^3}{N}}{\left[\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N} \right]^{3/2}}, \quad (9.48)$$

som *Pearson's Second Coefficient of Skewness*:

$$Skew_{2c} = \frac{3(\bar{x} \text{ median})}{SD} \quad (9.49)$$



Figur 9.19: Den lagdelte struktur i cortex. I = det molekylære lag, II = det ydre granulære lag, III = det ydre pyramidal lag, IV = det interne granulære lag, V = det store pyramidal lag, VI = det diffuse lag (gengivet fra Webster (1998)).

eller som *Centile Index of Skewness*:

$$Skew_{cent} = \frac{3(\text{antal samples} > \bar{x})}{N} \quad (9.50)$$

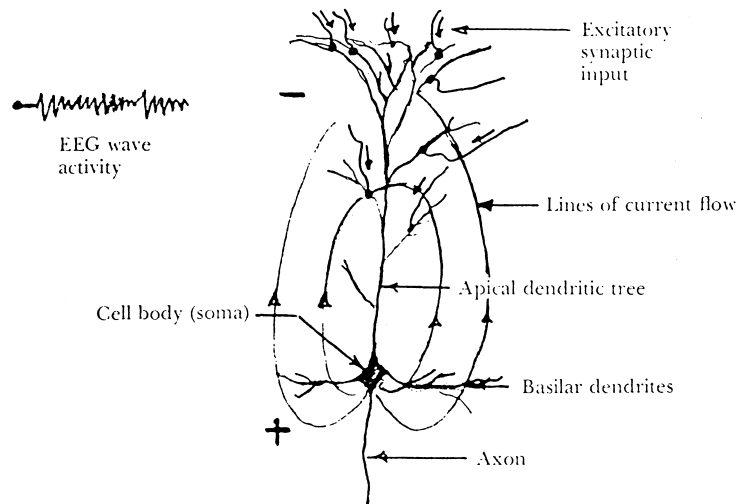
Kurtosis måler amplitudfordelingens fladhed eller stejthed. Negativ kurtosis opnåes, når signalet indeholder ringe variation i frekvens og amplitude. En positiv kurtosis fåes omvendt, når signalet indeholder transiente spidser. Kurtosis kan defineres som *Moment Coefficient of Kurtosis*:

$$Kurt_{mc} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^4}{N}}{\left[\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N} \right]^2} - 3, \quad (9.51)$$

eller som *Centile Index of Kurtosis*:

$$Kurt_{cent} = \frac{\text{antal samples så } |x_i - \bar{x}| > \text{standard amplitude}}{N} \quad (9.52)$$

I sidstnævnte definition vil værdien være 0.5 for en normalfordeling. Figur 9.23 viser at kurtosis bedre end skewness kan vise langtidseffekten af stimuli på hjernens aktivitet.



Figur 9.20: Pyramidalcellen med cellekernen, aksonet, og dendritterne (gengivet fra Webster (1998)).

9.7.2 Behandling af EEG-signaler i frekvensdomænet.

I visse typer EEG-undersøgelser, som f.eks. på patienter med hjerneblødning eller tumor i cortex, er man interesseret i at undersøge symmetrien i EEG-signalet mellem højre og venstre hemisfære. Dette kan gøres ved at sammenligne effektspektrene for signaler målt symmetrisk på skalpen. For at kunne foretage en sådan sammenligning over et langt tidsrum benytter man et såkaldt *compressed spectral arrays*, hvor effektspektre beregnet med jævne tidsintervaller plottes i tre dimensioner, med frekvensen som 1. akse, tidsaksen som 2. akse og effekten som 3. akse. Et interessant eksempel herpå er vist i figur 9.24.

En mere kvantitativ sammenligning af EEG-signaler fåes ved anvendelse af koherens spektret. En høj koherens mellem signaler målt symmetrisk på højre og venstre side er udtryk for en sådan symmetri, hvorimod en lav koherens kan være en indikation af en af de nævnte sygdomme.

Omvendt kan der være situationer, hvor man ønsker at registrere aktiviteter begrænset til et lille område af cortex. Her er idealet altså et EEG-signal, der udviser en lav koherens med de andre elektrodesignaler. Koherens har derfor stor anvendelighed i analysen af EEG-signaler og vi skal i det følgende benytte en simpel signalmodel for EEG til at belyse anvendelsen af koherens.

a) Definition og beregning af koherens

Betegnes effekt- og krydsspektret mellem to stokastiske signaler $x(t)$ og $y(t)$ for henholdsvis $S_X(f)$, $S_Y(f)$ og $S_{XY}(f)$, defineres *magnitude square coherence* som:

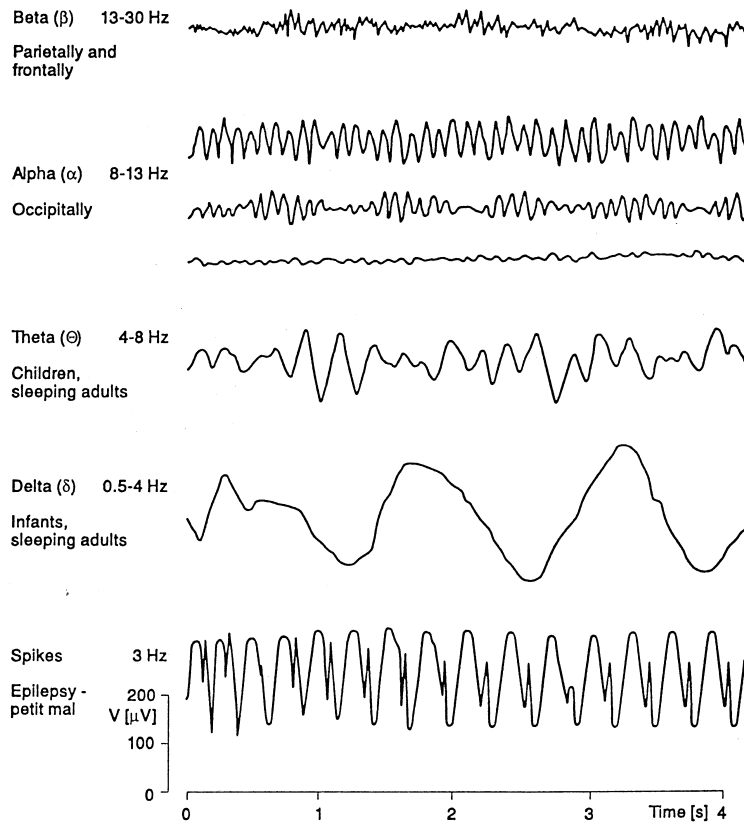
$$K_{XY}^2(f) = \frac{|S_{XY}(f)|^2}{S_X(f)S_Y(f)} \quad (9.53)$$

Da effektspektrene normalt estimeres med støjbefængte periodogrammer, benyttes midlede effektspektre:

$$\bar{S}_X(f) = E[S_X(f)], \bar{S}_Y(f) = E[S_Y(f)], \bar{S}_{XY}(f) = E[S_{XY}(f)] \quad (9.54)$$

f. eks. midlet over n epoker:

$$\bar{S}_X(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_X^i(f) \quad (9.55)$$



Figur 9.21: Eksempler på EEG signaler (gengivet fra Webster (1998)).

Indsættes lign. 9.54 i lign. 9.53 fåes den midlede koherens:

$$\bar{K}_{XY}^2(f) = \frac{|\bar{S}_{XY}(f)|^2}{\bar{S}_X(f)\bar{S}_Y(f)} \quad (9.56)$$

Resultatet af at midle effektspektret og koherensspektre over en serie epoker er tydeligt vist i figur 9.25 og figur 9.26.

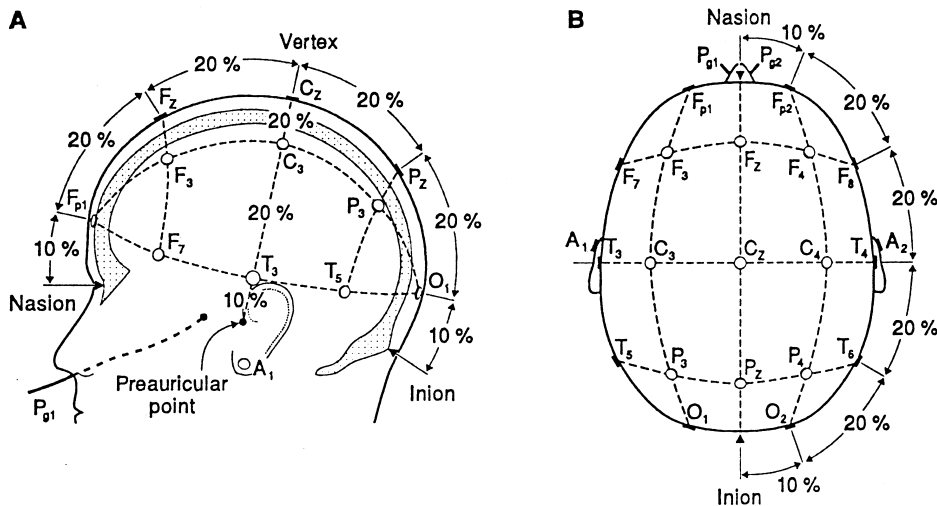
b) Koherens for en simpel lineær signalmodel.

Antager vi nu at to EEG signaler $x(t)$ og $y(t)$, målt eksempelvis på P_3 og P_4 i figur 9.22, indeholder et koherent EEG-signal $v(t)$ samt to ukorrelerede EEG-signaler $n_x(t)$ og $n_y(t)$ fåes:

$$\begin{aligned} x(t) &= av(t) + n_x(t) \\ y(t) &= bv(t) + n_y(t) \end{aligned} \quad (9.57)$$

hvor der for skaleringsfaktorerne a og b gælder at $0 \leq a, b \leq 1$. Selv om de to signaler $n_x(t)$ og $n_y(t)$ repræsenterer neurale signaler, vil vi i denne sammenhæng betragte dem som støj. Benyttes periodogramer, fåes med en simplificeret notation:

$$\begin{aligned} S_X &= a^2V^2 + 2aVN_x + N_x^2 \\ S_Y &= b^2V^2 + 2bVN_y + N_y^2 \\ S_{XY} &= abV^2 + aVN_x + bVN_y + N_xN_y \end{aligned} \quad (9.58)$$



Figur 9.22: Elektrodeplaceringer og -notation for det internationale 10-20 system (gengivet fra Webster (1998)).

Midles over et tilstrækkeligt antal epoker undertrykkes krydsprodukterne, og vi opnår:

$$\begin{aligned}\bar{S}_X &= a^2 V^2 + N_x^2 \\ \bar{S}_Y &= b^2 V^2 + N_y^2 \\ \bar{S}_{XY} &= abV^2\end{aligned}\quad (9.59)$$

Indsættes disse udtryk i lign. (9.56), fåes:

$$\bar{K}_{XY}^2(f) = \frac{1}{[1 + K_x][1 + K_y]} \quad (9.60)$$

hvor:

$$K_x = \frac{N_x^2}{a^2 V^2} \quad \text{og} \quad K_y = \frac{N_y^2}{b^2 V^2} \quad (9.61)$$

betegner støj/signal-forholdet for de to signaler. Hvis ingen af signalererne indeholder ukorrelerede signalkomponenter, vil vi få $\bar{K}_{XY}^2(f) = 1$. Omvendt gælder at $\bar{K}_{XY}^2(f) = 0$, hvis der ikke er korreleret aktivitet mellem de to hjerneregioner.

c) Reference-elektroden opsamler et ukorreleret signal.

I ovenstående eksempel var der ikke taget hensyn til, at EEG-signaler måles differentielt, og at reference-elektroden derved kan introducere mere eller mindre korrelerede signaler. Antages nu, at reference-elektroden opsamler et signal, der er ukorreleret i forhold til $v(t)$, $n_x(t)$ og $n_y(t)$:

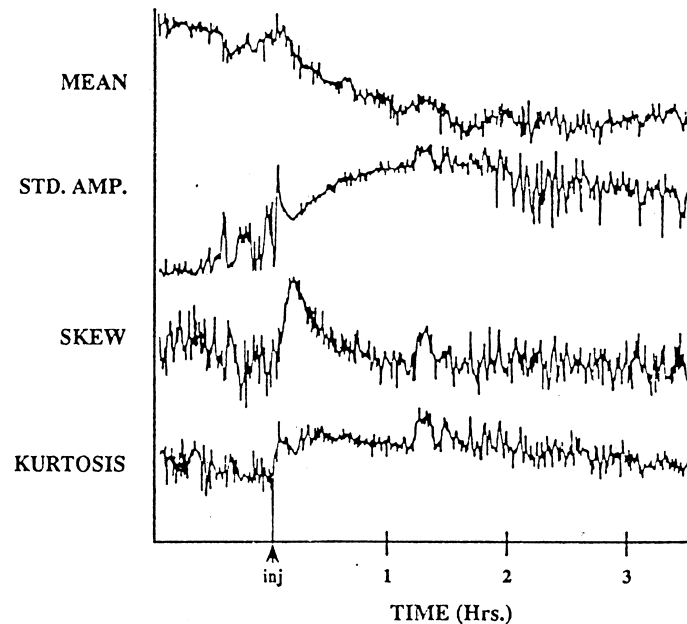
$$r(t) = n_r(t) \quad (9.62)$$

De to EEG-kanalers differensforsærkere har følgende signaler på udgangene:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= av(t) + n_x(t) - n_r(t) \\ y_1(t) &= bv(t) + n_y(t) - n_r(t)\end{aligned}\quad (9.63)$$

De midlede effekt- og krydsspektre bliver nu:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{X_1} &= a^2 V^2 + N_x^2 + N_r^2 \\ \bar{S}_{Y_1} &= b^2 V^2 + N_y^2 + N_r^2 \\ \bar{S}_{X_1 Y_1} &= abV^2 + N_r^2\end{aligned}\quad (9.64)$$



Figur 9.23: Variationer i EEG signalets amplitudemomenter som følge af en morfinindsprøjtning (angivet ved pilen) (gengivet fra Bronzino (1995)).

Magnitude square koherensen bliver nu:

$$\bar{K}_{X_1 Y_1}^2(f) = \frac{[1 + K_r^2]}{[1 + K_x + \frac{b}{a}K_r][1 + K_y + \frac{a}{b}K_r]} \quad (9.65)$$

hvor

$$K_r = \frac{N_r^2}{abV^2} \quad (9.66)$$

Ligning 9.65 viser, at en høj koherensværdi kan skyldes artefakter, der opstår, når reference-elektroden er placeret på et sted, hvor den opfanger kraftige ukorrelerede signaler. Disse ukorrelerede signaler kunne være EEG-signaler fra et neuralt kompleks, der ikke er synkroniseret med de regioner, hvor måle-elektroderne er anbragt. Det kunne også være interferenssignaler, så som EKG-signaler fra hjertet, EMG-signaler fra muskler i hovedbunden eller panden eller interferens fra lysnettet.

d) Reference-elektroden opsamler et korreleret EEG-signal.

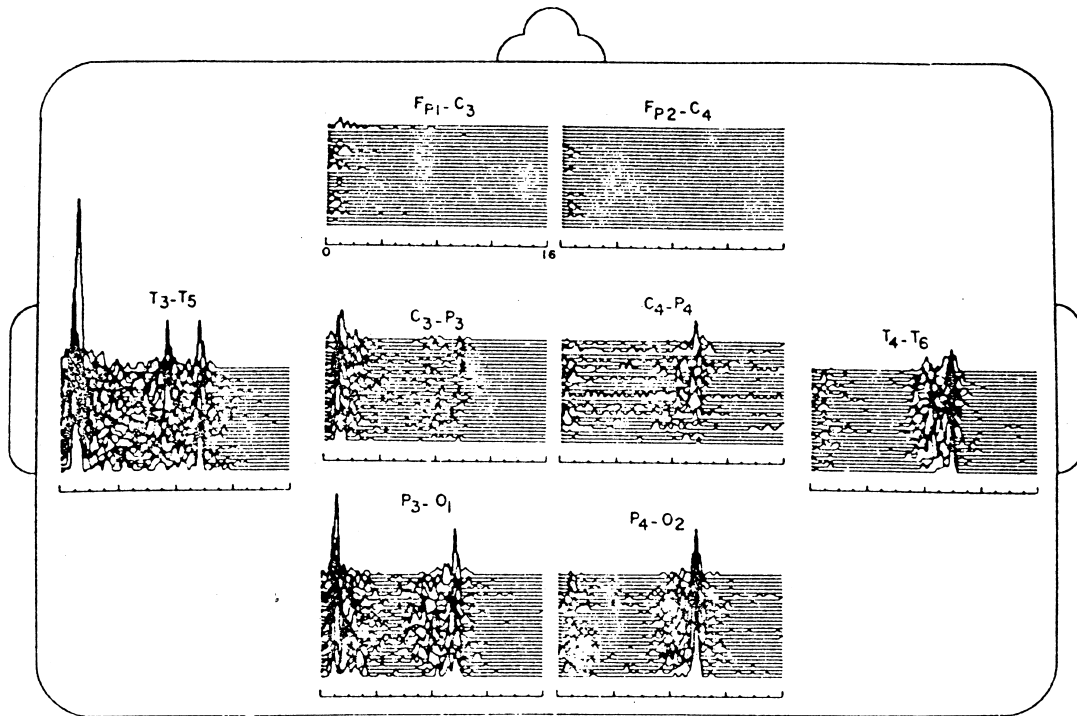
Antages nu, at reference-elektroden opsamler både et korreleret og et ukorreleret signal fåes:

$$r(t) = cv(t) + n_r(t) \quad (9.67)$$

hvor der for skaleringsfaktoren c gælder at $0 \leq c \leq 1$. Denne situation er eksemplificeret i brugen af den såkaldte *common average reference*, hvor middelværdien af alle elektrode-signaler danner reference-signalet. Et andet eksempel er *Laplace*-konfigurationen, hvor en centralt placeret elektrode måles med middelværdien af dens fire naboelektroder som reference. Betegnelsen for denne konfiguration skyldes at differens-signalet er en finite differens tilnærmelse af den todimensionelle Laplace operator virkende i centerelektrodens tangentplan. Laplace-konfigurationen måler derved et signal, der giver udtryk for den radiale strømtæthed i cortex.

Betragter vi her den generelle situation, bliver de målte signaler nu:

$$x_1(t) = (a - c)v(t) + n_x(t) - n_r(t)$$



Figur 9.24: Compressed spectral array af EEG målt symmetrisk fra otte punkter på hovedet. Frekvensaksen dækker området fra DC til 16 Hz. Højre side viser normal alpha-rytme. Venstre side viser unormal delta-aktivitet og indikerer derved en tumor i den temporale lap (gengivet fra Nunez (1981)).

$$y_1(t) = (b - c)v(t) + n_y(t) - n_r(t) \quad (9.68)$$

og for de midlede effekt- og krydsspektre fåes:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{X_1} &= (a - c)^2 V^2 + N_x^2 + N_r^2 \\ \bar{S}_{Y_1} &= (b - c)^2 V^2 + N_y^2 + N_r^2 \\ \bar{S}_{X_1 Y_1} &= (a - c)(b - c)V^2 + N_r^2 \end{aligned} \quad (9.69)$$

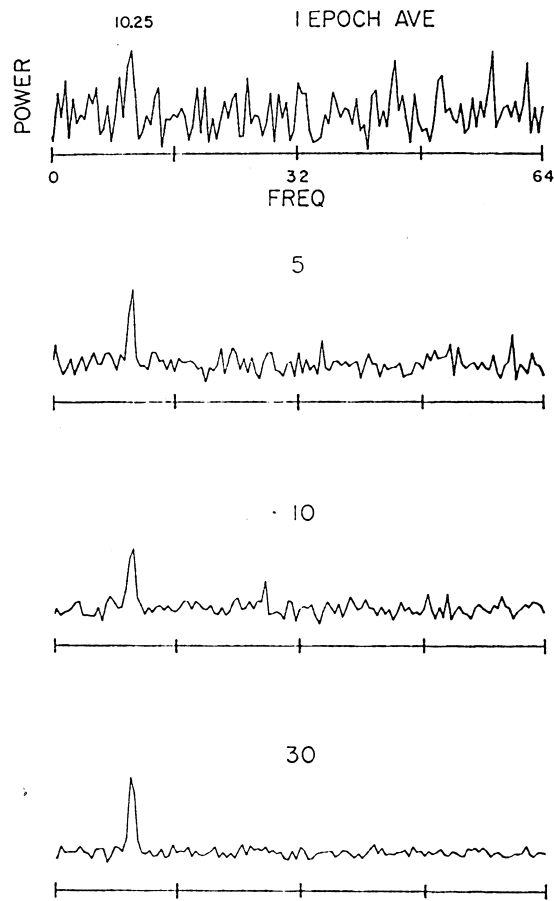
Magnitude square koherensen bliver i dette tilfælde:

$$\bar{K}_{X_1 Y_1}^2(f) = \frac{[1 + L_r^2]}{[1 + L_x + \frac{b-c}{a-c} L_r][1 + L_y + \frac{a-c}{b-c} L_r]} \quad (9.70)$$

hvor

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{N_x^2}{(a - c)^2 V^2} \\ L_y &= \frac{N_y^2}{(b - c)^2 V^2} \\ L_r &= \frac{N_r^2}{(a - c)(b - c)V^2} \end{aligned} \quad (9.71)$$

Hvis den koherente del af signalet (dvs. $v(t)$) opfanges lige godt af reference-elektroden som af måle-elektroderne fåes $a = b = c$. Koherensen er da udelukkende bestemt af "støjsignalernes" indbyrdes størrelsesforhold.



Figur 9.25: Effektspektret midlet over et stigende antal epoker for et sinusformet signal på 10.25 Hz begravet i et støjsignal med en effekt på det dobbelte af sinussignalet (gengivet fra Nunez (1981)).

e) Bipolær elektrodekonfiguration

Måles med bipolære elektroder, hvor alle elektroder er placeret således, at de opfanger både korrelerede og ukorrelerede signaler:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= a_1v(t) + n_{x_1}(t) \\
 y_1(t) &= b_1v(t) + n_{y_1}(t) \\
 x_2(t) &= a_2v(t) + n_{x_2}(t) \\
 y_2(t) &= b_2v(t) + n_{y_2}(t)
 \end{aligned} \tag{9.72}$$

fåes de to difference-signaler:

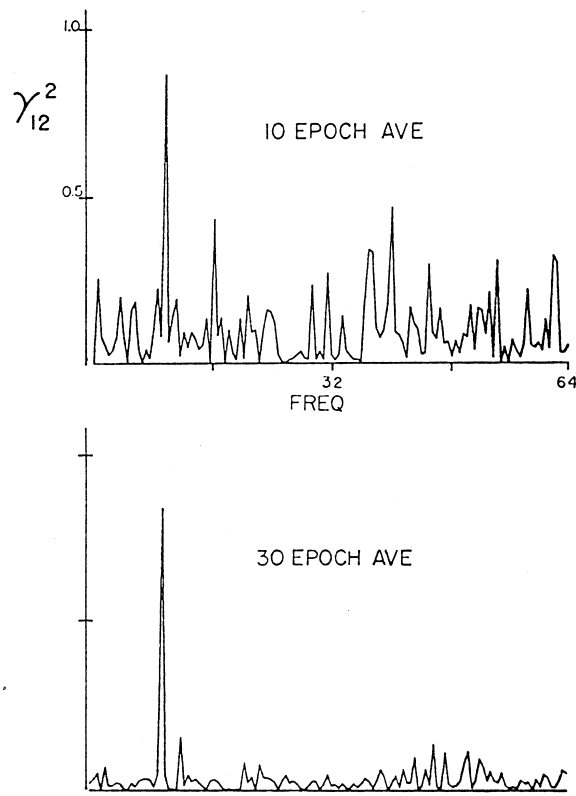
$$\begin{aligned}
 x_1(t) - y_1(t) &= (a_1 - b_1)v(t) + n_{x_1}(t) - n_{y_1}(t) \\
 x_2(t) - y_2(t) &= (a_2 - b_2)v(t) + n_{x_2}(t) - n_{y_2}(t)
 \end{aligned} \tag{9.73}$$

I dette tilfælde bliver koherensen:

$$\bar{K}_{12}^2(f) = \frac{1}{[1 + L_{x_1} + L_{y_1}][1 + L_{x_2} + L_{y_2}]} \tag{9.74}$$

hvor

$$L_{x_1} = \frac{N_{x_1}^2}{(a_1 - b_1)^2 V^2}$$



Figur 9.26: Koherensspektrum beregnet for to signaler med en 10.25 Hz sinusformet signal. Det andet signal indeholder desuden et støjsignal med en effekt, der er 45 gange større end det for de sinusformede signaler. I det øverste koherensspektrum er benyttet 10 epoker, og i det nederste 30 epoker (gengivet fra Nunez (1981)).

$$\begin{aligned}
 L_{y_1} &= \frac{N_{y_1}^2}{(a_1 - b_1)^2 V^2} \\
 L_{x_2} &= \frac{N_{x_2}^2}{(a_2 - b_2)^2 V^2} \\
 L_{y_2} &= \frac{N_{y_2}^2}{(a_2 - b_2)^2 V^2}
 \end{aligned}
 \tag{9.75}$$

Bipolære elektrodekonfigurationer benyttes rutinemæssigt i både transverse (f. eks. $P_3 - P_z$) og longitudinal (f. eks. $P_3 - C_3$) monteringer.

f) Afsluttende bemærkninger med hensyn til anvendelsen af koherens

De simple signalmodeller, der her er præsenteret, har udelukkende til formål at illustrere de mulige faktorer, som kan øve indflydelse på den koherensværdi, som man kan beregne på målte signaler. Modellen fremhæver specielt elektrode-konfigurationens store indflydelse på koherensen og opfordrer dermed elektrofysiologen til at benytte den konfiguration, som resulterer i minimal eller maximal koherens, i overensstemmelse med målingernes formål.

Classification	Acquisition	Frequency Range	Dynamic Range	Comments
Bioelectric				
Action potential	Microelectrodes	100 Hz–2 kHz	10 μ V–100 mV	Invasive measurement of cell membrane potential
Electroneurogram (ENG)	Needle electrode	100 Hz–1 kHz	5 μ V–10 mV	Potential of a nerve bundle
Electroretinogram (ERG)	Microelectrode	0.2–200 Hz	0.5 μ V–1 mV	Evoked flash potential
Electro-oculogram (EOG)	Surface electrodes	dc–100 Hz	10 μ V–5 mV	Steady corneal-retinal potential
Electroencephalogram (EEG)				
Surface	Surface electrodes	0.5–100 Hz	2–100 μ V	Multichannel (6–32) scalp potential
Delta range		0.5–4 Hz		Young children, deep sleep and pathologies
Theta range		4–8 Hz		Temporal and central areas during alert states
Alpha range		8–13 Hz		Awake, relaxed, closed eyes
Beta range		13–22 Hz		
Sleep spindles		6–15 Hz	50–100 μ V	Bursts of about 0.2 to 0.6 s
K-complexes		12–14 Hz	100–200 μ V	Bursts during moderate and deep sleep
Evoked potentials (EP)				
Visual (VEP)	Surface electrodes	1–300 Hz	0.1–20 μ V	Response of brain potential to stimulus
Somatosensory (SEP)		2 Hz–3 kHz	1–20 μ V	Occipital lobe recordings, 200-ms duration
Auditory (AEP)		100 Hz–3 kHz	0.5–10 μ V	Sensory cortex
Electrocorticogram	Needle electrodes	100 Hz–5kHz		Vertex recordings
Electromyography (EMG)				
Single-fiber (SFEMG)	Needle electrode	500 Hz–10 kHz	1–10 mV	Recordings from exposed surface of brain
Motor unit action Potential (MUAP)	Needle electrode	5 Hz–10 kHz	100 μ V–2 mV	Action potentials from single muscle fiber
Surface EMG (SEMG)				
Skeletal muscle	Surface electrodes	2–500 Hz	50 μ V–5 mV	
Smooth muscle		0.01–1 Hz		
Electrocardiogram (ECG)	Surface electrodes	0.05–100 Hz	1–10 mV	
High-Frequency ECG	Surface electrodes	100 Hz–1 kHz	100 μ V–2 mV	Notches and slus waveforms superimposed on the ECG.

Figur 9.27: Klassifikation af bioelektriske signaler (gengivet fra Bronzino (1995)).

9.8 Afsluttende kommentarer om bioelektrisk signalbehandling

I denne meget korte gennemgang af de bioelektriske signalers oprindelse, måling og signalbehandling har vi kun haft lejlighed til at give meget få eksempler. Heldigvis er de medikotekniske tidsskrifter fyldt med detaljerede beskrivelser af medikoteknisk signalbehandling, og læseren bør benytte de moderne søgeredskaber til at finde flere eksempler. Nedenstående tabel viser frekvens- og dynamikområdet for en lang række bioelektriske signaler.

Selv om signalbehandling er et særdeles omfattende og komplekst emne, er signalbehandling aldrig et mål i sig selv. Effektiv signalbehandling kan kun opnåes, når man besidder en god forståelse for de processer, der genererer signalerne og for anvendelsen af den information, som signalbehandlingen skal ekstrahere. Vi har derfor i dette kapitel bestræbt os på at give en afbalanceret introduktion til signalbehandlingens anvendelse indenfor medikoområdet.

Om fasetæthedsspektrets ubestemthed

Eftersom fasetæthedsspektret $\phi_g(f)$ for et signal $g(t)$ med spektret $G(f) = G_R(f) + jG_I(f)$ beregnes af

$$\phi_g(f) = \arctan \frac{G_I(f)}{G_R(f)} \quad (\text{A.1})$$

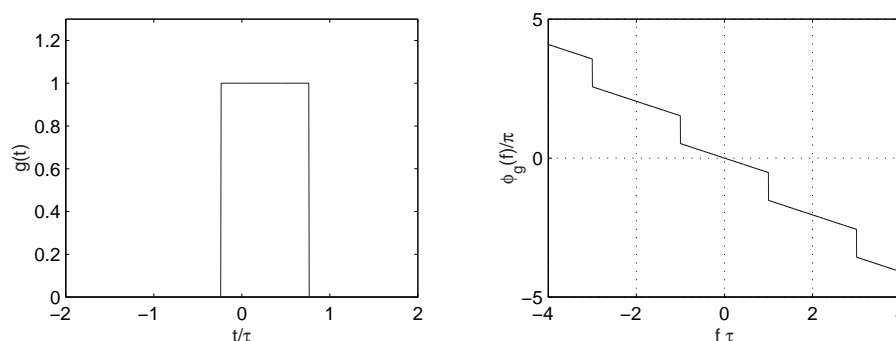
kan man ikke umiddelbart bestemme $\phi_g(f)$'s værdi entydigt, idet man får en løsning til ligningen i ethvert af intervallerne $[(2p-1)\pi/2, (2p+1)\pi/2]$, hvor p er hel.

Denne ubestemthed er naturligvis ubekvem, og en passende vedtægt om hvilket interval - eller hvilke intervaller -, der bør benyttes ved afbildninger af $\phi_g(f)$, vil være af stor vigtighed, idet sammenligninger ellers besværliggøres. Med hensyn til en sådan vedtægts udformning kan der anlægges flere synspunkter.

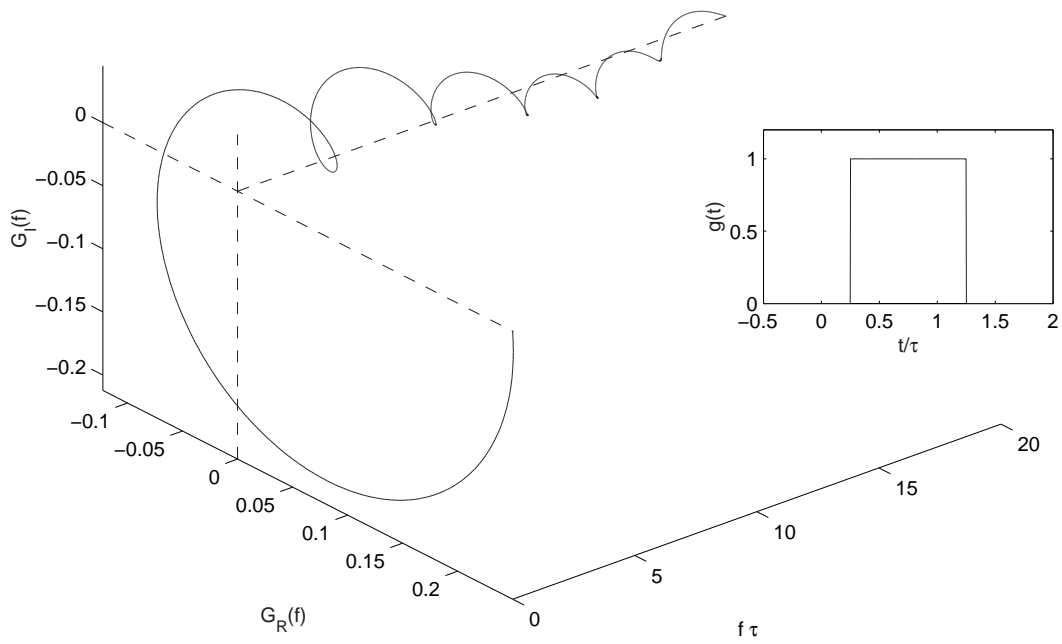
Den kendsgerning, at $\phi_g(f)$ er en ulige funktion af frekvensen betyder imidlertid, at $\phi_g(0)$ enten er 0 eller $\pm\pi$ afhængig af fortegnet for $G_R(0)$, da $G_I(0) = 0$ (reelle signaler). Det kan desuden være nyttigt, at fasespektrets lineære del fremtræder klart af afbildningen, da man jo kan udnytte dette til at finde signalets "placering" på t -aksen. Ser man på et firkantsignals fasespektrum (jf. kap. 2.3.1), vil det kunne afbildes som vist på figur A.1.

Heraf fornemmes umiddelbart fasespektrets lineære del svarende til forskydningen af $f(t)$'s tyngdepunkt mod positive t -værdier. Som det ses, udviser fasespektret undertiden spring på π (eller et multiplum af π) svarende til nulpunkter i spektret. Den "retning" et sådant spring kan have, må også fastlægges vedtægtsmæssigt. Til hjælp i sådanne tilfælde kan en tredimensional afbildning af $G_R(f)$ og $G_I(f)$ som funktion af frekvensen være nyttig, se figur A.2.

Tager man hensyn til ønsket om nem sammenligning mellem to fasespektre, og skeler man til den tekniske litteraturs afbildningsformer, synes det, som om afbildning i intervallet $\pm\pi$ vist på figur A.3, er

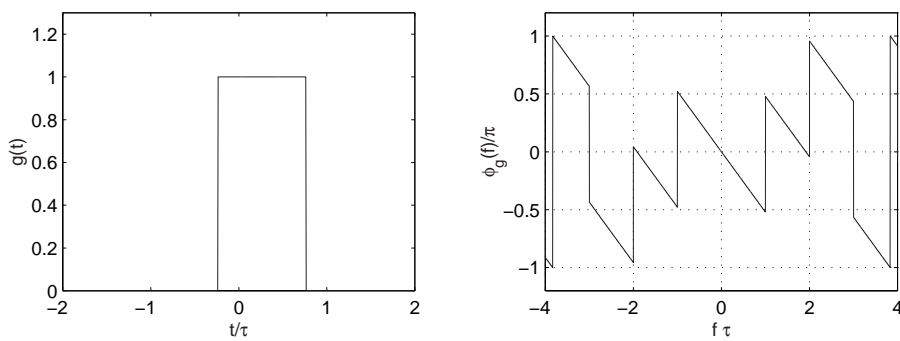


Figur A.1: Fasespektrum for analog firkant.



Figur A.2: Tredimensional afbildning af $G_R(f)$ og $G_I(f)$ for den viste firkant.

mest hensigtsmæssig. Den er derfor anvendt i denne fremstilling.



Figur A.3: Anvendt afbildning af fasespektrum for analog firkant.

Schwarz' og Cauchys uligheder

Disse to uligheder benyttes ved visse beviser og vurderinger inden for signalanalysen. Schwarz' ulighed formuleret for komplekse analoge signaler lyder

$$\left| \int_I g(t)h(t)dt \right|^2 \leq \int_I |g(t)|^2 dt \int_I |h(t)|^2 dt, \quad (\text{B.1})$$

hvor $g(t)$ og $h(t)$ er signaler med endelig energi, og I et - muligvis uendeligt - interval. Lighedstegnet gælder, dersom $g(t)$ er proportional med $h^*(t)$. Den tilsvarende ulighed for komplekse digitale signaler med endelig energi benævnes Cauchys ulighed

$$\left| \sum_n g(n)h(n) \right|^2 \leq \sum_n |g(n)|^2 \sum_n |h(n)|^2, \quad (\text{B.2})$$

hvor summationen kan være mellem endelige eller uendelige grænser. Beviset for gyldigheden af denne ulighed kan kort formuleres på følgende måde. Er

$$\sum_n g(n)h(n) = \alpha \cdot e^{j\beta} \quad (\text{B.3})$$

vil man for en vilkårlig reel konstant k have, at

$$\sum_n |g(n) - ke^{j\beta}h(n)|^2 \geq 0. \quad (\text{B.4})$$

Udregnes den numeriske værdi, er udtrykket ensbetydende med, at

$$k^2 \sum_n |h(n)|^2 - 2k \left| \sum_n h(n)g(n) \right| + \sum_n |g(n)|^2 \geq 0 \quad (\text{B.5})$$

Opfattes dette som en andengrads ligning i k , må

$$4 \left| \sum_n h(n)g(n) \right|^2 - 4 \sum_n |h(n)|^2 \sum_n |g(n)|^2 \leq 0 \quad (\text{B.6})$$

og dette udtryk er identisk med Cauchys ulighed. Det ses let, at er $g(n) = kh^*(n)$, vil lighedstegnet gælde. Beviset for Schwarz' ulighed kan føres på samme måde

Et nyttigt formeludtryk

Formeludtrykket

$$\frac{\sin 2\pi f_g \tau}{2\pi f_g \tau} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi f_g(t - q\Delta T)}{2\pi f_g(t - q\Delta T)} \frac{\sin 2\pi f_g(t + \tau - q\Delta T)}{2\pi f_g(t + \tau - q\Delta T)} \quad (\text{C.1})$$

kan verificeres på følgende måde¹. Det båndbegrænsede signal $x(\theta)$ kan skrives på formen

$$x(\theta) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(q\Delta T) \frac{\sin 2\pi f_g(\theta - q\Delta T)}{2\pi f_g(\theta - q\Delta T)}, \quad (\text{C.2})$$

hvor $f_g = (2\Delta T)^{-1}$. På lignende vis kan man udtrykke den tidsforskudte udgave af $x(\theta)$ således

$$x(\theta - t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(q\Delta T - t) \frac{\sin 2\pi f_g(\theta - q\Delta T)}{2\pi f_g(\theta - q\Delta T)}. \quad (\text{C.3})$$

Ved hjælp af variabeltransformationen $\tau = \theta - t$ fremkommer

$$x(\tau) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(q\Delta T - t) \frac{\sin 2\pi f_g(t + \tau - q\Delta T)}{2\pi f_g(t + \tau - q\Delta T)}. \quad (\text{C.4})$$

Indføjes i denne ligning det bestemte båndbegrænsede signal

$$x(\tau) = \frac{\sin 2\pi f_g \tau}{2\pi f_g \tau}. \quad (\text{C.5})$$

får man det først opskrevne formeludtryk.

¹Se A. Papoulis: Error Analysis in Sampling Theory, Proc. IEEE, Vol. 54, no. 7, July 1966, pp. 947-955.

Støjsignal fra passivt analogt system

Som bekendt giver de termiske bevægelser af elektroner i almindelige ledende materialer anledning til, at der over en sådan leder findes en elektrisk støjspænding. Denne støjspænding er et stokastisk signal, hvis sandsynlighedstæthedsfunktioner med god tilnærmelse er gaussiske.

Man kan vise, at der for dette støjsignal $N(t)$ gælder

$$E\{N(t)\} = 0 \quad (\text{D.1})$$

samt, at

$$S_N(f) = 2k\theta R \quad , \quad (\text{D.2})$$

hvor $k = 1,37 \cdot 10^{-23}$ joule/ $^{\circ}\text{K}$ (Boltzmann's konstant), θ lederens temperatur i $^{\circ}\text{K}$ og R dens ohmske modstand. Som det ses, er støjens spektrum hvidt ¹.

Af fysiske grunde vil en sådan støjende modstand altid optræde sammen med andre - støjfri - kredsløbselementer. For et sådant system vil det gælde, at støjsignalet $X(t)$ på systemets udgang, som skyldes de nævnte elektronbevægelser i komponenter inde i systemet, stadig vil være gaussisk med et effekttæthedsspektrum

$$S_X(f) = 2k\theta \text{Re}(Z(f)) \quad . \quad (\text{D.3})$$

hvor $Z(f)$ er den impedans, man ser ind i fra systemets udgangsklemmer. (Nyquist's sætning).

Består det passive system af en modstand R i parallel med en kapacitet C , bliver

$$\text{Re}(Z(f)) = \frac{R}{1 + (2\pi fRC)^2} \quad . \quad (\text{D.4})$$

Hermed vil det støjsignal $X(t)$, som findes over RC-kredsløbet, have spektret

$$S_X(f) = \frac{2k\theta R}{1 + (2\pi fRC)^2} \quad . \quad (\text{D.5})$$

Den hertil svarende autokorrelationsfunktion får udseendet

$$R_X(\tau) = \frac{k\theta}{C} e^{-\frac{|\tau|}{RC}} \quad (\text{D.6})$$

(se kap. 5.7.4). Bemærk, at

$$P_X = \frac{k\theta}{C} \quad . \quad (\text{D.7})$$

¹Udtrykket for $S_N(f)$ er kun gyldigt op til ca. 10^{10} Hz.

Generator for digitalt støjsignal

Ved mange anvendelser har man brug for at kunne råde over et digitalt støjsignal med passende parametre (fordeling, spektrum m.v.). Der eksisterer flere metoder til frembringelse af et sådant signal (f.eks. sampling af det analoge støjsignal enten fra en modstand, jævnfør appendix D, eller fra et passende udformet halvleder kredsløb), men den mest almindelige metode går ud fra en passende beregningsprocedure, hvoraf man kan få såkaldte pseudotilfældige tal $X(n)$, d.v.s. tal, hvorom det gælder, at

$$E\{X(n)X(n+k)\} = E^2\{X(n)\} \quad \text{for } k \neq 0 \quad , \quad (\text{E.1})$$

med rimelig god tilnærmelse.

Den multiplikative generator

$$X(n) = (aX(n-1) + b) \pmod{M} \quad (\text{E.2})$$

hvor a , b og M er heltallige konstanter frembringer strengt taget et periodisk signal med en periode, der er $\leq M$. Er M passende stor, og vælges a og b på fornuftig måde, kan man opnå, at

$$w_X(\xi) = \frac{1}{M} \quad \text{for } 0 \leq \xi \leq M-1 \quad (\text{E.3})$$

og, at spektret for $X(n)$ bliver næsten hvidt.

Betingelserne på a , b og M kan kort udtrykkes på formen

1. b og M vælges indbyrdes primiske,
2. a vælges tæt på \sqrt{M} , og
3. $a \pmod{4} = 1$, hvis 4 er faktor i M eller $a \pmod{p} = 1$, hvis p er primfaktor i M .

Det ses umiddelbart, at

$$E\{X(n)\} = (M-1)/2 \quad (\text{E.4})$$

og, at

$$E\{X^2(n)\} = (M-1)(2M-1)/6 \quad (\text{E.5})$$

Denne generators rektangulære fordeling kan ændres ved en passende transformation af signalet jævnfør kap. 5.1.2. Ønskes det således, at det ny signal $Y(n)$ skal have fordelingen $W(\eta)$ skal transformationen have formen den omvendte funktion til $W(\eta)$, altså

$$\eta = W^{-1}(\xi) \quad . \quad (\text{E.6})$$

Man får da let, at

$$w_Y(\eta) = \frac{w_X(\xi)}{|[W^{-1}(\xi)]'|} \quad , \quad (\text{E.7})$$

Er $X(n)$ nu fordelt rektangulært i intervallet $0 \leq \xi \leq 1$, vil $w_X(\xi) = 1$, og dermed er

$$w_Y(\eta) = W'(\eta) = w(\eta) \quad . \quad (\text{E.8})$$

Såfremt man ønsker et normalt fordelt signal¹, kan man også filtrere $X(n)$ med et passende filter og derpå sample $Y(n)$ således, at den heraf flydende spektrale overlapning får $Y(n)$'s spektrum til at blive hvidt.

Følgende ikke-lineære transformation, som giver 1 signalværdi af $Y(n)$ fra hver 2 indgangsværdier af signalet $X(n)$ bevirker også, at $Y(n)$ bliver normalfordelt med god tilnærmelse

$$Y(n) = (-2 \ln(X(n)))^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi X(n-1)) \quad . \quad (\text{E.9})$$

Er man utilfreds med, at $E\{X(n)\} \neq 0$ og at $E\{X^2(n)\}$ har en forkert størrelse, kan der selvfølgelig justeres for disse forhold (se f.eks. kap. 5.4.3) inden en eller anden af de ovenfor nævnte transformationer foretages.

¹Dette er - som tidligere nævnt - strengt taget ikke muligt for et digitalt signal.

Ækvivalent statistisk båndbredde for et stokastisk signal

For et stokastisk signal $x(t)$ med effekttæthedsspektret $S_x(f)$ kan signalets ækvivalente statistiske båndbredde B_s beregnes af

$$B_s = \frac{1}{2} \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df \right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(f) df} \quad (\text{F.1})$$

Da signalets ækvivalente støjbåndbredde B_e er givet ved

$$B_e = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{S_x(f)}{S_x(f_m)} df \quad (\text{F.2})$$

hvor f_m er den frekvens, hvor $S_x(f)$ antager sin maksimale værdi, får man

$$B_s = \frac{1}{2} \frac{B_e^2}{\int_0^{\infty} \frac{S_x(f)}{S_x(f_m)} df} \quad (\text{F.3})$$

I dette udtryk har nævneren samme form som den ækvivalente støjbåndbredde B_{e2} for et hypotetisk signal med effekttæthedsspektret $S_x^2(f)$ således at

$$B_s = \frac{B_e}{B_{e2}} B_e. \quad (\text{F.4})$$

Det er indlysende, at

$$0 \leq \left[\frac{S_x(f)}{S_x(f_m)} \right]^2 \leq \frac{S_x(f)}{S_x(f_m)} \leq 1, \quad (\text{F.5})$$

og dermed vil man for et givet signal altid have, at

$$B_s \geq B_e, \quad (\text{F.6})$$

hvor lighedstegnet gælder, hvis $S_x(f)$ er konstant indenfor et specificeret frekvensområde og nul ellers.

For et signal $y(t)$ med effekttæthedsspektret

$$S_y(f) = \frac{1}{1 + (f/f_0)^2} \quad (\text{F.7})$$

(svarende til RC-lavpasfiltreret hvid støj, $f_0 = 1/(2\pi RC)$) vil $f_m = 0$, og dermed bliver

$$B_s = \pi f_0/2 \quad \text{og} \quad B_e = \pi f_0. \quad (\text{F.8})$$

I dette tilfælde, hvor spektrets fald mod højere frekvenser er 20 dB/dekade, er forholdet

$$B_s/B_e = 2. \quad (\text{F.9})$$

Dette betyder, at man ofte med god tilnærmelse kan benytte B_e istedet for B_s ved skøn over nøjagtigheden af effektmåling, uanset hvordan $S_x(f)$ ellers ser ud.

De regninger, som fører frem til ovenstående resultater, kan også udføres for stokastiske digitale signaler. Har signalet $x(n)$ effektspektret $S_x(f)$, er

$$\frac{B_s}{2f_g} = \frac{1}{2} \frac{\left[\frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} S_x(f) df \right]^2}{\frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} S_x^2(f) df}. \quad (\text{F.10})$$

Da B_e for digitale signaler er defineret ved

$$B_e = \int_0^{f_g} \frac{S_x(f)}{S_x(f_m)} df, \quad (\text{F.11})$$

får man

$$B_s = \frac{B_e^2}{\int_0^{f_g} \left[\frac{S_x(f)}{S_x(f_m)} \right]^2 df}, \quad (\text{F.12})$$

og dermed ælder det også for digitale signaler, at

$$B_s = \frac{B_e}{B_{e2}} B_e. \quad (\text{F.13})$$

Besselfunktioner af første art

Som der fremgår af kap. 8.1.3 optræder ovennævnte Besselfunktion i spektret for FM- og PM-signaler. Man har at

$$J_m(\mu) = \left(\frac{1}{2}\mu\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\mu^2\right)^k}{k!(m+k)!}, \quad (\text{G.1})$$

hvor m er et helt tal (funktionens orden). Det kan indses, at

$$J_m(\mu) = (-1)^m J_{-m}(\mu). \quad (\text{G.2})$$

Herudover gælder det, at højere ordens Besselfunktioner kan beregnes af udtrykket

$$J_{m+2}(\mu) = \frac{2(m+1)}{\mu} J_{m+1}(\mu) - J_m(\mu). \quad (\text{G.3})$$

Bemærk at

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(\mu) = 1. \quad (\text{G.4})$$

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.00	1.0000	0.0000	5.00	-0.1776	-0.3276	10.00	-0.2459	0.0435
0.10	0.9975	0.0499	5.10	-0.1443	-0.3371	10.10	-0.2490	0.0184
0.20	0.9900	0.0995	5.20	-0.1103	-0.3432	10.20	-0.2496	-0.0066
0.30	0.9776	0.1483	5.30	-0.0758	-0.3460	10.30	-0.2477	-0.0313
0.40	0.9604	0.1960	5.40	-0.0412	-0.3453	10.40	-0.2434	-0.0555
0.50	0.9385	0.2423	5.50	-0.0068	-0.3414	10.50	-0.2366	-0.0789
0.60	0.9120	0.2867	5.60	0.0270	-0.3343	10.60	-0.2276	-0.1012
0.70	0.8812	0.3290	5.70	0.0599	-0.3241	10.70	-0.2164	-0.1224
0.80	0.8463	0.3688	5.80	0.0917	-0.3110	10.80	-0.2032	-0.1422
0.90	0.8075	0.4059	5.90	0.1220	-0.2951	10.90	-0.1881	-0.1603
1.00	0.7652	0.4401	6.00	0.1506	-0.2767	11.00	-0.1712	-0.1768
1.10	0.7196	0.4709	6.10	0.1773	-0.2559	11.10	-0.1528	-0.1913
1.20	0.6711	0.4983	6.20	0.2017	-0.2329	11.20	-0.1330	-0.2039
1.30	0.6201	0.5220	6.30	0.2238	-0.2081	11.30	-0.1121	-0.2143
1.40	0.5669	0.5419	6.40	0.2433	-0.1816	11.40	-0.0902	-0.2225
1.50	0.5118	0.5579	6.50	0.2601	-0.1538	11.50	-0.0677	-0.2284
1.60	0.4554	0.5699	6.60	0.2740	-0.1250	11.60	-0.0446	-0.2320
1.70	0.3980	0.5778	6.70	0.2851	-0.0953	11.70	-0.0213	-0.2333
1.80	0.3400	0.5815	6.80	0.2931	-0.0652	11.80	0.0020	-0.2323
1.90	0.2818	0.5812	6.90	0.2981	-0.0349	11.90	0.0250	-0.2290
2.00	0.2239	0.5767	7.00	0.3001	-0.0047	12.00	0.0477	-0.2234
2.10	0.1666	0.5683	7.10	0.2991	0.0252	12.10	0.0697	-0.2157
2.20	0.1104	0.5560	7.20	0.2951	0.0543	12.20	0.0908	-0.2060
2.30	0.0555	0.5399	7.30	0.2882	0.0826	12.30	0.1108	-0.1943
2.40	0.0025	0.5202	7.40	0.2786	0.1096	12.40	0.1296	-0.1807
2.50	-0.0484	0.4971	7.50	0.2663	0.1352	12.50	0.1469	-0.1655
2.60	-0.0968	0.4708	7.60	0.2516	0.1592	12.60	0.1626	-0.1487
2.70	-0.1424	0.4416	7.70	0.2346	0.1813	12.70	0.1766	-0.1307
2.80	-0.1850	0.4097	7.80	0.2154	0.2014	12.80	0.1887	-0.1114
2.90	-0.2243	0.3754	7.90	0.1944	0.2192	12.90	0.1988	-0.0912
3.00	-0.2601	0.3391	8.00	0.1717	0.2346	13.00	0.2069	-0.0703
3.10	-0.2921	0.3009	8.10	0.1475	0.2476	13.10	0.2129	-0.0489
3.20	-0.3202	0.2613	8.20	0.1222	0.2580	13.20	0.2167	-0.0271
3.30	-0.3443	0.2207	8.30	0.0960	0.2657	13.30	0.2183	-0.0052
3.40	-0.3643	0.1792	8.40	0.0692	0.2708	13.40	0.2177	0.0166
3.50	-0.3801	0.1374	8.50	0.0419	0.2731	13.50	0.2150	0.0380
3.60	-0.3918	0.0955	8.60	0.0146	0.2728	13.60	0.2101	0.0590
3.70	-0.3992	0.0538	8.70	-0.0125	0.2697	13.70	0.2032	0.0791
3.80	-0.4026	0.0128	8.80	-0.0392	0.2641	13.80	0.1943	0.0984
3.90	-0.4018	-0.0272	8.90	-0.0653	0.2559	13.90	0.1836	0.1165
4.00	-0.3971	-0.0660	9.00	-0.0903	0.2453	14.00	0.1711	0.1334
4.10	-0.3887	-0.1033	9.10	-0.1142	0.2324	14.10	0.1570	0.1488
4.20	-0.3766	-0.1386	9.20	-0.1367	0.2174	14.20	0.1414	0.1626
4.30	-0.3610	-0.1719	9.30	-0.1577	0.2004	14.30	0.1245	0.1747
4.40	-0.3423	-0.2028	9.40	-0.1768	0.1816	14.40	0.1065	0.1850
4.50	-0.3205	-0.2311	9.50	-0.1939	0.1613	14.50	0.0875	0.1934
4.60	-0.2961	-0.2566	9.60	-0.2090	0.1395	14.60	0.0679	0.1999
4.70	-0.2693	-0.2791	9.70	-0.2218	0.1166	14.70	0.0476	0.2043
4.80	-0.2404	-0.2985	9.80	-0.2323	0.0928	14.80	0.0271	0.2066
4.90	-0.2097	-0.3147	9.90	-0.2403	0.0684	14.90	0.0064	0.2069

Tabel G.1: Tabel over Besselfunktioner $J_0(x)$ og $J_1(x)$

Kort introduktion til MATLAB

Matlab er et interaktivt programmeringssprog udviklet til manipulering af vektorer og matricer, og er baseret på LINPACK og EISPACK bibliotekerne. På grund af den lette håndtering af vektorer har det også vundet stor udbredelse inden for signalbehandling, da der også findes en lang række rutiner til at lave signalbehandling med (foldning, fouriertransformation, etc.). Sproget er interaktivt og udføres direkte som f.eks. BASIC, hvilket gør det let at afprøve en række forskellige analyser og behandlinger. Det er også muligt at udvide sproget med nye funktioner og grupperer en række ordre i en fil, så de udføres når files navn skrives.

I dette appendix gives en ganske kort introduktion til sproget og dets faciliteter. For en mere dybdegående beskrivelse henvises til brugermanualerne eller speciallitteraturen.

H.1 Grundlæggende forhold

Man **starter** MATLAB fra en PC ved at klikke på ikonet, og fra en UNIX-terminal ved at skrive kommandoen

```
matlab
```

Når MATLAB åbnes, svarer MATLAB med at skrive:

```
To get started, type one of these commands: helpwin, helpdesk, or demo.  
For information on all of the MathWorks products, type tour.  
>>
```

>> er MATLAB's prompt og man skriver MATLAB-kommandoerne efter den. I de følgende eksempler på kommandoer, skal >> ikke skrives.

Man **stopper** MATLAB og returnerer til operativ-systemet med kommandoen

```
>> quit
```

Aritmetik bruger den sædvanlige notation, som f.eks.

```
>> 2+3*4^2
```

MATLAB vil så svare:

```
ans=
```


50

>>

Variable tilskrives værdier med lighedstegnet "=". F.eks.

```
>> x=3
>> y=x^2
>> y/x
```

MATLAB skelner mellem store og små bogstaver; Xn og xn er altså to forskellige variabelnavne. Hvis man ikke selv specificerer et variabelnavn, gemmer MATLAB resultatet i variabelen ans. Kommandoen

```
>> whos
```

giver en liste over de definerede variable. Disse kan slettes med kommandoen

```
>> clear
```

MATLAB har en række predefinerede variable. F.eks. er $i=\sqrt{-1}$, $j=\sqrt{-1}$ og $\pi=\pi$, medmindre man selv har brugt i, j eller pi som et variabelnavn.

MATLAB regner med komplekse tal. F.eks. definerer

```
>> s=j*2*pi*2.5e3
```

den komplekse frekvens $s = j2\pi 2.5 \cdot 10^3$ rad/sek. Bemærk at der ikke må være ophold i et tal; $2.5 \cdot 10^3$ må altså ikke skrives som "2.5 e 3". Alle regninger foregår i dobbelt præcision (med ca. 16 betydende cifre), selvom ikke alle cifre i resultatet vises. Med ordren `format` kan man få resultater vist med flere cifre.

Hvis man ikke vil se et mellemresultat på skærmen, skal man skrive semikolon efter ordren. F.eks.

```
>> w=2*pi*2.5e3;
>> s=j*w;
```

Man kan få tidligere afgivne kommandoer frem med piletasten ↑. Disse kan så eventuelt rettes og afgives igen ved at trykke på enter. Dette letter skrivet arbejdet meget. Skrives man selv de(t) første bogstav(er) i den ønskede kommando, inden man trykker på ↑, viser MATLAB kun de kommandoer, der begynder med disse bogstaver.

MATLAB har et godt **help-system**. Hvis du vil have flere oplysninger om en kommando som f.eks. `format`, vil

```
>> help format
```

give disse. `help` giver oversigt over hovedgrupperne af MATLAB-kommandoer, og `help general` giver en liste over "general purpose commands".

På en PC kan man få MATLAB til at læse og skrive fra filer i et bestemt bibliotek f.eks. "mydir" med ordren

```
>> cd c:\mydir
```

I et UNIX-system er ordren:

```
>> cd mydir
```

Kommandoer

```
>> diary session.txt
```

gemmer alt, hvad der har stået på skærmen, i filen "session.txt" i biblioteket "mydir". Du kan få alle dine variable gemt i en fil med navnet "mysession.mat" med ordren

```
>> save mysession
```

Næste gang du åbner MATLAB, kan du starte med at skrive

```
>> load mysession
```

Så er du præcis der, hvor du slap. For andre muligheder for forskellige formater og input/output-mængder brug `help save` og `help load`.

MATLAB har mange **indbyggede funktioner** såsom sinus, cosinus f.eks.

```
>> y=sin(2*pi*2e3*1e-3);
```

`help elfun` giver en liste over disse.

H.2 Matricer

Som navnet antyder er MATLAB¹ matrix-baseret. Matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

kan indlæses med

```
>> A= [1,2,3;4 5 6]
```

eller med

```
>> A= [ 1 2 3
      4 5 6 ]
```

Bemærk at

- Elementerne er omsluttet af [og]
- Først indlæses første række, dernæst anden række o.s.v.
- Rækker adskilles med semikolon-tegnet ";" eller ny linie. Elementerne i en række adskilles af komma-tegnet "," eller mellemrum. (Pas på overflødige mellemrum.)

Man refererer til det j 'te element i den i 'te række med $A(i, j)$ f.eks.

```
>> A(2,3)=10
```

Med **kolon-operatoren** ":" kan man definere lister. F.eks. definerer

¹MATLAB står for MATrix LABoratory program.

```
>> t = -1:0.01:1;
```

rækkevektoren

$$\mathbf{t} = (-1, -0.99, -0.98, -0.97, \dots, 0.97, 0.98, 0.99, 1);$$

Hvis incrementet (ovenfor 0.01) er 1, kan det udelades. $\mathbf{t} = -1:1$ definerer altså rækkevektoren $\mathbf{t} = (-1, 0, 1)$.

Komandoerne `zeros(m,n)` og `ones(m,n)` definerer en $m \times n$ -matrix fyldt med henholdsvis 0-er og 1-er. F.eks. definerer

```
>> B = [ones(1,4), zeros(1,3)]; 1 2 3 4 5 6 7]
```

matricen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Antallet af elementer i vektoren \mathbf{t} findes med kommandoen

```
>> length(t);
```

Størrelsen af matricen \mathbf{A} findes med

```
>> size(A);
```

Man kan gange/dividere en matrix med en skalar og addere/subtrahere en skalar fra en matrix med operatorerne `*`, `/`, `+` og `-`. Man kan addere/subtrahere to matricer med ens dimensioner med operatorerne `+` og `-`. Man kan multiplicere/dividere to matricer med ens dimensioner element for element med operatorerne `.*` og `./`. Bemærk punktummet. F.eks. vil

```
>> a = [1 2 3];
```

```
>> b = a .* a;
```

give resultat $b = (1, 4, 9)$. Det samme ville

```
>> b = a .^2;
```

Hvis man bruger en af de almindelige funktioner såsom `sin` og `cos` på en matrix, anvendes funktionen på hvert element for sig. F.eks. giver

```
>> b = [1 4 9];
```

```
>> c = sqrt(b);
```

resultatet $\mathbf{c} = (\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}) = (1, 2, 3)$.

H.3 Flow-kontrol og logiske udtryk

”for-sløjfen. Formen er

for {variable = udtryk}, {gruppe af kommandoer} **end** {gruppe af kommandoer} mellem kommaet , og **end** gentages et antal gange, som specificeres af {variable = udtryk}. F.eks. kan middelværdien af vektoren \mathbf{v} 's komponenter beregnes med følgende kommandoer:

```
>> middel=0;
```

```
>> for i=1:length(v),
```

```

    middel=middel+v(i);
end
>> middel=middel/length(v)

```

”if-sætningen. Den simpleste form er

if {logisk udtryk} , {gruppe af ordre} **end**

Her udføres {gruppe af ordre} mellem , og **end**, såfremt {logisk udtryk} er sandt. For mere avancerede former brug `help if`.

De logiske udtryk dannes med relations-operatorerne

lig med	ikke lig med	større end	mindre end	større end eller lig med	mindre end eller lig med
==	~=	>	<	>=	<=

og de logiske operatører

logisk AND	logisk OR	logisk NOT
&		~

For eksempel defineres signalet

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi t) & \text{for } |t| < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

i intervallet $-2 \leq t \leq 2$ med en samplingtid på 0.004 med følgende kommandoer:

```

>> t=-2:0.004:2;
>> x=0*t;
>> for i=1:length(t),
    if abs(t(i)) <= 1, x(i)=cos(2*pi*t(i)); end
end

```

Man kunne også bruge

```

>> t=-2:0.004:2;
>> x=cos(2*pi*t) .* (abs(t) <= 1);

```

Brug `help`-funktionen for `switch`-, `while`- og `break`-kommandoerne.

H.4 Grafik

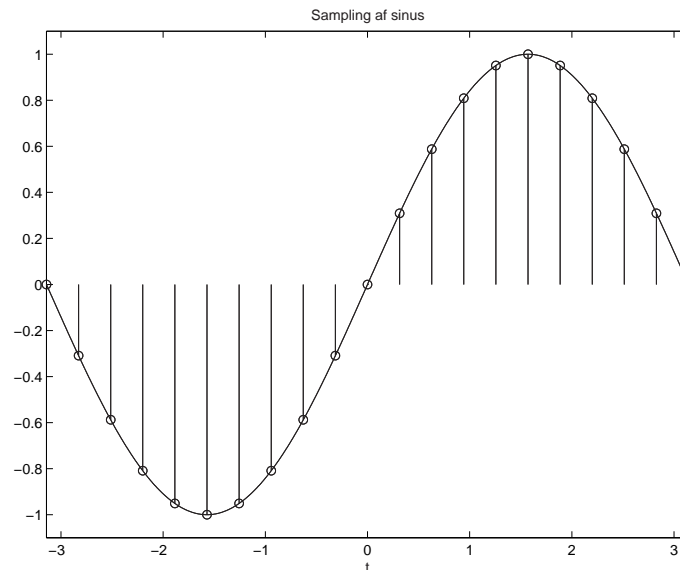
Hvis x og y er to vektorer af samme længde, vil kommandoen `plot(x,y)` åbne et grafisk vindue, og forbinde punkterne $(x(i), y(i)), i = 1, \dots, \text{length}(x)$ med rette linier. F.eks. vil

```

>> x=(-1:0.001:1)*pi; y=sin(x); plot(x,y)

```

afbilde $\sin(x)$ i intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$. For ændring af stregtype m.m. se `help plot`. Man kan afbilde flere kurver på en gang. F.eks. afbilder



Figur H.1: Sampling af sinus

```
>> x=(-1:0.001:1)*pi; y=sin(x); z=cos(x); plot(x,y,x,z)
```

afbilde både $\sin(x)$ og $\cos(x)$.

Kommandoen `stem(x,y)` tegner lodrette linier fra hvert punkt $(x(i), y(i))$ ned/op til abcisse-aksen. Denne kommando anvendes til plotning af diskrete funktioner. F.eks. afbilder

```
>> x=(-1:0.1:1)*pi; y=sin(x); stem(x,y)
```

afbilde perioden $-\pi \leq x \leq \pi$ af $\sin(n\frac{2\pi}{10})$. Se iverigt `help stem`.

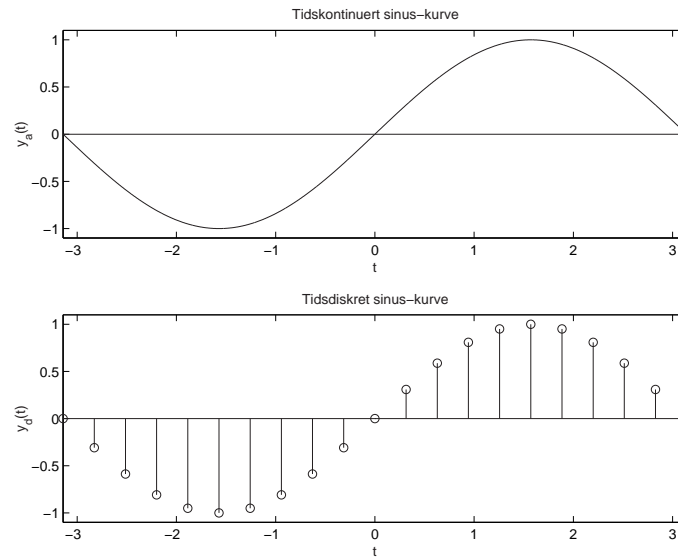
Både `plot` og `stem` vælger selv længden af akser. De kan ændres med kommandoen `axis([xmin,xmax,ymin,ymax])`, hvor `xmin`, `xmax`, `ymin` og `ymax` er de ønskede endpunkter for akserne.

Man kan få skrevet titel, betegnelser på akserne, og påskrift på tegningen med ordrene `title`, `xlabel`, `ylabel`, `text` og `gtext`. Disse kommandoer skal alle placeres lige efter den `plot` eller `stem`, som de vedrører.

Kommandoen `hold on` fastholder det aktuelle grafiske vindue, så følgende plot alle bliver tegnet i det fastholdte vindue. Kommandoen `hold off` ophæver `hold on`. F.eks. vil følgende kommandoer frembringe figur H.1:

```
>> x=(-1:0.001:1)*pi; y=sin(x); plot(x,y)
>> axis([-pi pi -1.1 1.1])
>> xlabel('t')
>> title('Sampling af sinus')
>> hold on
>> x=(-1:0.1:0.9)*pi; y=sin(x); stem(x,y)
>> hold off
```

Kommandoen `subplot(m,n,p)` opdeler det aktuelle grafiske vindue i en $m \times n$ -matrix af mindre grafiske vinduer, og vælger det p 'te af disse til det aktuelle plot. F.eks. frembringes figur H.2 af



Figur H.2: Sampling af sinus

```
>> x=(-1:0.001:1)*pi; y=sin(x);
>> subplot(2,1,1), plot(x,y,[-pi,pi],[0 0])
>> axis([-pi pi -1.1 1.1])
>> xlabel('t')
>> ylabel('y_a(t)')
>> title('Tidskontinueret sinus-kurve')
>> x=(-1:0.1:0.9)*pi; y=sin(x);
>> subplot(2,1,2), stem(x,y)
>> hold on
>> subplot(2,1,2), plot([-pi,pi],[0 0])
>> axis([-pi pi -1.1 1.1])
>> xlabel('t')
>> ylabel('y_d(t)')
>> title('Tidsdiskret sinus-kurve')
>> hold off
```

H.5 .m-filer

Ved bare lidt større opgaver, er det uhensigtsmæssigt at taste hver enkelt kommando direkte ind i MATLAB. Det er heller ikke nødvendigt. Gemmes f.eks. kommandoer til frembringelse af figur H.2 i filen `samp.m`², kan man få udført beregningen ved at taste ordren

```
>> samp
```

i MATLAB.

Man kan også danne funktioner på denne måde. Få nærmere beskrivelse med

```
>> help function.
```

I .m-filer kan man indsætte **kommentarer**, idet alt, hvad der ligger mellem et procent-tegn "%" og

²Navnet foran . kan vælges frit; typen skal være .m

afslutningen af linien, opfattes som en kommentar. F.eks.

```
x=(-1:0.1:0.9)*pi; y=sin(x); % En periode af sinus-funktionen
```

H.6 Signalbehandling

MATLAB har indbygget en række funktioner til at lave signalbehandling med, hvoraf de vigtigste skal nævnes.

Til at lave en **diskret fouriertransformation** benyttes funktionen `fft`, som returnerer det komplekse spektrum af det givne signal. F.eks. vil

```
>> y=[ones(1,4),zeros(1,5)];  
>> spektrum_y=fft(y);
```

beregner spektret `spektrum_y` af et periodisk digitalt signal med perioden 1,1,1,1,0,0,0,0. `fft` implementerer følgende transformation:

$$Y(m) = \sum_{n=1}^N y(n)e^{-j2\pi \frac{m-1}{N}(n-1)}$$

for $m=1:N$. Bemærk forskellen til den almindelige diskrete fouriertransformation for et periodisk digitalt signal, som er

$$Y(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j2\pi \frac{m}{N}n}$$

Der normeres altså ikke med $\frac{1}{N}$ og indices starter fra 1 i stedet for 0. Frekvenserne for de returnerede værdier er

```
>> f=(0:N-1)/N*fs;
```

hvor `fs` er samplingfrekvensen. Amplitudespektret med tilsvarende frekvensværdier kan plottes med

```
>> plot(f,abs(spektrum_y)/length(y));
```

eller med nummering af de harmoniske:

```
>> stem((0:length(y)-1),abs(spektrum_y)/length(y));
```

En **foldning** med et filters impulssvar udføres med

```
>> y=conv(h,x);
```

En **filtrering** med et IIR-filter kan udføres med

```
>> y=filter(b,a,x);
```

hvor b , a er filterkoefficienterne, og filtreringen er givet ved

$$a(1)*y(n) = b(1)*x(n) + b(2)*x(n-1) + \dots + b(nb+1)*x(n-nb) \\ - a(2)*y(n-1) - \dots - a(na+1)*y(n-na)$$

(se også `help filter`).

H.7 Yderligere litteratur

Først og fremmest MATLABs help-system. Er en web-browser åben, vil

```
>> helpdesk
```

åbne et web-baseret help-system.

På internettet findes mange vejledninger. Se f.eks. på <http://www.mathworks.com/education/basics.shtml>.

Har man adgang til dem, giver de manualerne, som følger med MATLAB, den udtømmende forklaring. Iøvrigt kan man i boghandelen købe en studenterversion med tilhørende manual.

LITTERATUR

- [1] O. T. Andersen: *Medicinsk elektronik*, Institut for Informationsteknologi, DTU, 1995.
- [2] J. S. Bendat og A. G. Piersol: *Random Data. Analysis and Measurement Procedures*, 2. udgave, John Wiley & Sons, 1986.
- [3] C. C. Bissell og D. A. Chapman: *Digital Signal Transmission*, Cambridge University Press, 1992.
- [4] R. E. Crochiere og L. R. Rabiner: *Multirate Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 1983.
- [5] G. M. Jenkins og D. G. Watts: *Spectral Analysis and its Applications*, Holden-Day, 1968.
- [6] J. A. Jensen: *Estimation of Blood Velocities Using Ultrasound, A Signal Processing Approach*, Cambridge University Press, 1996.
- [7] A. V. Oppenheim og R. W. Schaffer: *Discrete-time signal processing*, Prentice Hall, 1989.
- [8] A. Papoulis: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 1991.
- [9] J. G. Proakis og D. G. Manolakis: *Introduction to Digital Signal Processing*, Macmillan Inc., 1988.
- [10] M.I. Skolnik: *Introduction to Radar Systems*, McGraw-Hill, 1980.
- [11] F. G. Stremler: *Introduction to Communication Systems*, 3. udgave, Addison-Wesley, 1991.
- [12] G. Wade: *Signal coding and processing*, 2. udgave, Cambridge University Press, 1994.
- [13] J. G. Webster (ed.): *Medical Instrumentation, Application and Design*, John Wiley & Sons, 1998.
- [14] P. D. Welch: "The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Vased on Time Averaging over Short, Modified Periodograms", *IEEE Trans. Au. Electroacous.*, AU-15, side 70-73, 1967.
- [15] J. D. Bronzino: *The Biomedical Engineering Handbook*, CRC Press og IEEE Press, 1995.
- [16] J. Malmivuo og R. Plonsey: *Bioelectromagnetism*, Oxford University Press, 1995.
- [17] P. Nunez: *Electric fields of the brain: The neurophysics of EEG*, Oxford University Press, 1981.
- [18] A. V. Sahakin, K. M. Ropella, J. M. Baerman og S. Swiryn: "Measuring the organization of cardiac rhythms using the magnitude-squared coherence function," *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, side 25 - 28, March, 1990.

Der findes naturligvis en omfattende litteratur om signalanalyse og digital signalbehandling. En omfattende liste kan findes i Oppenheim og Schaffer (1989).